

ВТЕКАЮЩИЕ И ВЫТЕКАЮЩИЕ НЕСОБСТВЕННЫЕ МОДЫ: АНАЛИЗ ДИССИПАТИВНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ВОЛНА ЦЕННЕКА

М. В. Давидович

*Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н. Г.
Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, 410012, Саратов, Российская Федерация
Тел. (845) 2736650, Факс (845) (845) 227-85-29.
E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru*

Рассмотрены комплексные вытекающие и втекающие несобственные и квазисобственные вытекающие электромагнитные волны в диссипативных металлических и металлодиэлектрических структурах и на границах раздела диссипативных сред, описываемые комплексными дисперсионными уравнениями. Приведены функции Грина и интегральные уравнения для многослойных и периодических структур, описывающие втекающие и вытекающие поверхностные плазмоны (ПП). Определены свойства и условия существования втекающей быстрой и медленной поверхностной волны Ценнека (ПВЦ) над морем и под ионосферой, двумерных ПП и волн в гиперболическом метаматериале, а также квазиповерхностной волны при наличии кривизны поверхности. Показано, что в области $-2 < \varepsilon' < 0$ ПВЦ переходит в быстрые и медленные ПП. Исследованы фазовая v_p и групповая v_g скорости в подобных диссипативных структурах и показано, что возможны случаи $v_g > c$, $v_g = \pm\infty$ даже при малой диссипации. Показана ошибочность вывода ряда работ о невозможности существования быстрой ПВЦ.

PACS numbers: 41.20.Jb, **78.68.+m**

Содержание

1. Введение (1).
2. Плоская граница раздела двух сред (23).
3. Волна Ценнека над морской поверхностью (33).
4. Волна Зоммерфельда-Ценнека вдоль диэлектрического цилиндра (провода) (42).
5. Втекающие квазиволны вдоль цилиндрических и сферических поверхностей (43).
6. Двумерные плазмоны на бесконечно тонком импедансном слое (48).
7. Функции Грина, интегральные уравнения и плазмоны в многослойных и периодических структурах (57).
8. Втекающая волна в гиперболическом метаматериале (65).
9. Заключение (67).
- Список литературы (68).

1. Введение

В обзоре рассмотрены электромагнитные поверхностные волны (ПВ) вдоль поверхностей диссипативных структур (сред). Наличие таких волн впервые (по аналогии с акустическими) еще в 1896 г. предположил Арнольд Зоммерфельд [1], который в 1899 г. получил первое дисперсионное уравнение (ДУ) такой волны вдоль проводящего провода (цилиндра) [2], известной как ПВ Зоммерфельда (или Зоммерфельда-Ценнека) [3, 4]. В 1907

г. Джонатан Ценнек, ученик Зоммерфельда, получил ДУ для электромагнитной ПВ на плоской границе раздела двух сред [5] (далее по тексту – уравнение (6)). Он и Зоммерфельд поначалу считали, что именно на этой волне – поверхностной волне Ценнека (ПВЦ) осуществляется дальняя (за горизонт) радиосвязь [6, 7], что затем с развитием радио стали считать ошибкой. История, связанная с ПВЦ, начиная от работ Зоммерфельда, первой дальней радиосвязи Г. Маркони в 1901 г. и до наших дней многократно описана в литературе. Ее можно посмотреть, например, в недавних работах [8–33] и в более ранних публикациях [34–69], а также в имеющихся там ссылках. В этих работах рассматриваются случаи классической плоской ПВЦ [8, 10, 14, 15, 32, 38–42, 67–69], волны над волнистой поверхностью [12, 23], ПВЦ в структурах [11, 31, 57, 65], цилиндрической ПВЦ [6, 10, 35–41, 45–49, 52–54, 68, 69], возбуждаемой вертикальным диполем на плоской границе раздела, а также возбуждение вертикальным диполем многослойной сферической структуры (волновода) [19, 39, 43, 50, 53, 58, 64] и волны в ней. Рассмотрены проблемы возбуждения и обнаружения ПВЦ.

В истории науки трудно или даже невозможно найти явление, которое бы столько раз переоткрывалось, как ПВЦ, и для которой существует много названий, что также можно найти в указанной литературе. В частности, впервые медленные оптические ПВЦ наблюдал Р. Вуд (1902, аномалии Вуда при рассеянии света над металлическими дифракционными решетками [44]), но экспериментальное открытие ПВЦ принадлежит скорее даже не Вуду, а Николе Тесла, который несколькими годами ранее передавал энергию радиочастотного диапазона вдоль поверхности земли, используя относительно низкие частоты и большие мощности. Объяснение аномалиям Вуда дал У. Фано в 1941 г. [44], и такие ПВЦ часто связывают с его именем [27]. В 30-х годах прошлого века К.А. Нортон, рассматривая распространение радиоволн с учетом влияния ионосферы, ввел волну [38, 39], которую называют поверхностной волной Нортонна [68–70], но которая чисто поверхностной не является и содержит как ПВЦ, так и объемные

волны [33]. В 1949 г. профессор Мюнхенского университета Отто Шуман (Winfried Otto Schumann) высказал идею о существовании низкочастотных волн, огибающих Землю и образующих низкочастотные резонансы на частотах порядка 7–10 Гц в системе Земля-ионосфера, т.е. фактически предположил наличие волны, способной огибать поверхность Земли со скоростью света. В 1952 г. он опубликовал три работы [71–73]. Одну из них заметил Герберт Кёниг, обративший внимание на то, что низшая частота волны Шумана совпадает с альфа-ритмом человеческого мозга. В том же 1952 г. Шуман и Кёниг экспериментально обнаружили эти резонансы. Волна Шумана частоты порядка 7 Гц есть ПВЦ, образующая резонанс. Она идет в пространстве между землей и ионосферой (сферическом волноводе), глубоко проникая в обе эти среды. Так, в 2011 г. спутником C/NOFS на высоте до 850 км наблюдался низший резонанс Шумана [74]. Конечно, при такой длине волны, примерно равной периметру земного шара, волна легко его огибает. Но волна все же носит сильно выраженный поверхностный втекающий в ионосферу и землю характер, обеспечивающий достаточно высокую добротность колебаний. Как уже отмечено, задолго до открытия Шумана в конце позапрошлого – начале прошлого века ПВЦ удавалось возбуждать Николе Тесла. ПВЦ (согласно Ценнеку) следует трактовать как распространяющуюся вдоль почти сферической поверхности Земли, а в общем смысле – как волну вдоль произвольной поверхности некой диссипативной среды (все реальные среды диссипативные). В расширенном смысле ПВЦ широко используются – это плазмон-поляритонные ПВ или поверхностные плазмоны (ПП) в разных структурах [20, 22, 30, 44, 75–80]. Известны, в частности, плазмоны Дьяконова, обнаруженные им на границах раздела сред с разной анизотропией [78]. Описанию ПВЦ и сходных волн в различных структурах посвящались монографии [24, 25], кандидатские и докторские диссертации, имеются патенты (например, [81]). ПВЦ используется в загоризонтных радарх поверхностной волны (ЗГР ПВ) [16, 27]. Следует отметить два основных принципа ЗГР. Первый – односкачковая

и многоскачковая локация, использующая отраженный от ионосферы луч (впервые идея была предложена в СССР в 1947 г. Н.И. Кабановым, а первую действующую ЗГР реализовал Е.С. Штырен в конце 50-х годов). Второй – использование земного луча (рефракции и приземного волновода) и ПВЦ. Первый ЗГР ПВ «Волна» был создан в СССР в 1982 г. с дальностью обнаружения до 300 км. Имеются зарубежные ЗГР ПВ, разработанные в ряде стран: SWR-503, SWR-610, SWR-1018, (США, Канада), SECAR (Австралия), WERA (Германия) [16]. Идут разработки и в других странах. В России разработаны ЗГР "Подсолнух" и "Контейнер".

Итак, с момента теоретического (Зоммерфельд, 1899; Ценнек, 1907) и экспериментального (Тесла, 1897–1898; Вуд, 1902 г.; Шуман, 1952) открытий прошло немало времени, опубликованы сотни статей, монографии и диссертации. Если не учитывать ранние эксперименты Тесла, уже более 70 лет ПВЦ используется в системах связи с подводными лодками (о чем будет сказано далее), на ПВЦ созданы (в СССР, России и за рубежом), функционируют, а также разрабатываются новые ЗГР, использующие ПВЦ [16, 25–28]. В оптике потери в прозрачном диэлектрике весьма малы, и ПВЦ соответствует падению плоской волны под углом Брюстера [4] (см. возражение против ПВЦ по этому поводу в [27]). Поэтому экспериментальное открытие ПВЦ можно приписать даже Дэвиду Брюстеру (1815), Само ДУ для ПВЦ при плоской границе раздела даже не трансцендентное, а разрешено в явном виде (следует только правильно извлечь квадратный корень). Казалось бы, в чем же проблема ставить под сомнение существование ПВЦ сейчас [10, 17, 27, 28], или же пытаться ее заново экспериментально обнаружить [6, 21, 62, 66]? Однако ряд последних публикаций указывает на то, что для некоторых исследователей проблема есть: одни пытаются доказать, что ПВЦ (имея в виду быструю волну) не существует [17, 27, 28], другие же экспериментально подтверждают (или пытаются подтвердить) ее существование [6, 21]. Появляются свежие [32] теоретические опровержения указанных ошибочных публикаций [27, 28]

(хотя вполне достаточно и старых), а также и опровержения ниспровергателей ПВЦ своих же ошибочных результатов [29], причем опять же с ошибками. Это указывает на то, что вопрос большому числу исследователей не до конца ясен, а необходимость в прояснении свойств ПВ, и в частности ПВЦ, существует, хотя эти вопросы в той или иной мере изложены в значительном числе работ.

Настоящий обзор посвящен электромагнитным волнам: несобственным и квазисобственным втекающим ПВ, а также несобственным вытекающим и втекающим антиповерхностным (экспоненциально нарастающим) волнам в диссипативных структурах. Все эти волны описываются комплексными ДУ, а соответствующие решения принадлежат к классу несамосопряженных задач. ПВЦ принадлежит к типу втекающей или скользящей (в английской терминологии *gliding*) ПВ. По-видимому, отмеченные факты непризнания ПВЦ связаны с тем обстоятельством, что собственные ПВ спустя некоторое время были исследованы в идеальных направляющих структурах: диэлектрических волноводах (ДВ), замедляющих системах (ЗС) (например, в гребенках) и в других периодических волноводах. Теоретические исследования таких идеальных (недиссипативных) структур обычно приводят к собственным *медленным* ПВ. Далее было обнаружено, что ниже частоты отсечки такая собственная ПВ становится несобственной быстрой вытекающей волной (БВВ) [4, 81–84], имеющей радиационные потери, даже если диссипации нет (в экранированных волноводах ПВ переходит в быструю волноводную моду). Для открытых ДВ задача становится несамосопряженной, а волновой вектор комплексным. Это же имеет место всегда при наличии диссипации. Диссипация в ДВ приводит к потерям энергии в нем, т.е. к втеканию ПВ. Действительно, поперечное волновое число в вакууме для волны вдоль оси x с зависимостью $\exp(i\omega t - ik_x x)$ имеет вид $k_z = \sqrt{k_0^2 - (k'_x - ik''_x)^2}$. Для медленной волны $k'_x > k_0$, а при малых диэлектрических потерях k''_x мало. Поэтому для волны в положительном

направлении оси z имеем компоненту волнового вектора $k_z \approx -i\sqrt{k_x'^2 - k_0^2}(1 - ik_x'k_x''/(k_x'^2 - k_0^2))$, т.е. волна поверхностная и втекающая. Если не учитывать дисперсию диэлектрической проницаемости (ДП) $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, максимальные потери будут достигаться на весьма высоких частотах. На них комплексная постоянная распространения имеет вид $k_x \approx k_0\sqrt{\varepsilon' - i\varepsilon''}$, почти вся энергия движется в диэлектрике, поле на границах раздела мало, втекает в ДВ, экспоненциально затухая в поперечном направлении, а коэффициент замедления (КЗ) максимален. Уменьшение частоты приводит к тому, что комплексный КЗ волны $n = k_x/k_0$ становится равным единице. Такая волна является плоской и скользит под нулевым углом к ДВ. Поскольку вся энергия течет по бесконечному поперечному сечению вне ДВ, потерь нет. Ниже частоты отсечки, для которой $k_x = k_0$ (речь идет о волне с отсечкой) появляется БВВ с комплексным $k_x = k_x' - ik_x''$. Для диссипативного ДВ она появляется сразу, тогда как при идеальном диэлектрике имеется переход через нефизическую антиповерхностную волну [4], т.е. дисперсионная ветвь терпит разрыв. Диэлектрические потери усиливают вытекание, но основной вклад в потери k_x'' на распространение начинают вносить радиационные потери из-за вытекания. Волна ДВ без отсечки всегда втекающая.

Вытекающие волны также соответствуют несомосопреженной краевой задаче, не удовлетворяют условию излучения (условию Зоммерфельда) и, что самое главное, тесно связаны с источником. Это означает, что такую математически существующую волну в чистом виде создать и выделить нельзя: требуется бесконечно мощный бесконечно долго действующий источник, бесконечный волновод и бесконечный приемник. Скажем, светящий в торец отрезка ДВ (световода) лазерный луч с частотой ниже критической создаст в некой окрестности квазивытекающую волну. Однако такая волна будет нарастать в поперечном направлении только на длинах, меньших длины волновода, и уж тем более не будет существовать на расстояниях, больших ct (t – время действия лазера). Такой же

несобственной волной, но еще более привязанной к источнику, является и вытекающая ПВЦ. Хотя она и поверхностная, но в открытых структурах условию излучения не удовлетворяет.

Мы сначала рассмотрим классическую плоскую ПВЦ над плоской границей раздела, а затем вытекающие ПВ и вытекающие волны в различных структурах. Плоская ПВЦ может быть как быстрой, так и медленной [4]. Как будет видно далее, для всех радиочастот вплоть до ТГц (в том числе и для использованной Маркони частоты 30 КГц) ПВЦ над океаном быстрая. Далее будут найдены условия ее существования как для случая быстрой, так и медленной волн в произвольной среде. Тот факт, что ПВЦ может быть как быстрой, так и медленной, весьма интересен (полученные Л.А. Вайнштейном на основе импедансного подхода аналитические результаты для условия перехода медленной ПВЦ в быструю, как будет показано ниже, являются приближенными). Некоторые авторы определение ПВЦ неоправданно сужают, считая ПВЦ только быстрой [27]. Итак, ПВЦ есть волна *несобственная* и *вытекающая*, так же как несобственной волной является и вытекающая волна. Переход между быстрыми и медленными волнами вообще присущ несобственным волнам. Несобственные физические волны всегда комплексные и не удовлетворяют условию излучения (условию Зоммерфельда). Но они удовлетворяют закону сохранения энергии в следующей форме: внутри сферы любого радиуса, проведенной из любой точки поля несобственной волны выполняется закон сохранения энергии. Указанное утверждение можно обобщить на любую замкнутую поверхность, содержащую часть поля такой несобственной волны. Это простое и физически ясное утверждение подходит и для собственных волн (для волновода в качестве такой поверхности удобно взять отрезок его цилиндрической поверхности и два торцевых сечения). Указанное утверждение легко доказать, например, для вытекающей волны в идеальной (без потерь) диэлектрической пластине [4, 82].

Многие десятилетия в первой половине 20-го века при радиосвязи не удавалось эффективно возбудить ПВЦ и особенно ее принять (выделить из пространственного спектра волн), что послужило для ряда исследователей основанием считать, что она есть верное математическое волновое решение, не существующее физически (см. [10, 17, 27]). Под пространственным спектром мы понимаем набор различных значений волновых векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}(k_0)$, определяющих дисперсию каждой из волн ($k_0 = \omega/c$). Другие же считали, что ПВЦ сложно возбудить реальными антеннами, тем более принять, и что она вообще не существенна для радиосвязи [4, 45, 46]. Это верное, в общем, утверждение, преобладает в научном сообществе, но следует учесть, что на ПВЦ уже более 70 лет осуществляется связь. Правда, нужно оговориться, что используемые ПВЦ в силу их связи с источниками и из-за кривизны поверхности Земли следует считать квазиповерхностными волнами (КПВ).

Таким образом, быстрые ПВЦ вдоль земной поверхности возбуждал еще Тесла. Достоверным фактом экспериментального открытия ПВЦ в виде медленных ПП следует считать 1902 г. (аномалии Вуда), правда тогда теоретического объяснения не последовало (объяснение Рэля 1907 г. было не совсем удачным). Объяснение в рамках ПП дал У. Фано в 1941 г., поэтому медленную ПВЦ часто называют волной Фано [27]. В последние 2–3 десятилетия вновь появились работы по экспериментальному обнаружению ПВЦ в радиодиапазоне, и подобные попытки продолжаются до сих пор (см., например, [27] и литературу там). В данной работе мы не будем касаться этого отдельного вопроса о достоверности подобных результатов, хотя присутствие быстрых ПВЦ (точнее КПВ) в спектре принимаемых волн не вызывает сомнений (эти волны, в частности, генерируют грозовые разряды, которых каждую секунду на Земле происходит порядка сотни и более). Тем не менее, как и ранее, в последнее время появляются работы (например, [27, 28]), в которых авторы пытаются доказать невозможность *математического* существования ПВЦ, или, во всяком случае, тот факт, что за ней, хоть это и

есть математическое решение, не стоит никакого физического явления. Эти авторы в основном отрицают быструю ПВЦ. Это ошибочное мнение, что также будет показано.

Для понимания сути вопроса отметим следующее. В последние несколько десятилетий аналитически и численно были исследованы медленные и быстрые волны также и в реальных диссипативных структурах – ДВ с различными однородными, неоднородными и многослойными профилями, периодических, однородных металлических и металлодиэлектрических волноводах и т.п. (см., например, [83–90]). Они легко возбуждаются, канализируют энергию и передают сигнал. Наиболее простой ДВ представляет собой плоскопараллельную пластинку конечной толщины [4, 82]. Переход от собственных медленных ПВ ($K_3 > 1$), экспоненциально убывающих в обе стороны в поперечном направлении от ДВ, через отсечку к БВВ хорошо описан в [4]. БВВ появляется немного ниже отсечки (критической частоты), на которой существует не затухающая ни в поперечном, ни в продольном направлениях плоская волна, идущая со скоростью света c . Численное исследование указанных переходов для диссипативных и слабо диссипативных ДВ произведено в работах [83, 84]. БВВ плохо пригодна для канализации энергии и передачи информации, хотя ее не очень трудно возбудить и обнаружить. Приведенный пример возбуждения БВВ лазером в длинном отрезке тонкого волоконного световода при условии $K_3 < 1$ относится к квазиволне. Для точного создания БВВ нужен бесконечно мощный источник и бесконечный (полубесконечный) волновод. Принять же (выделить) БВВ можно, например, несколькими датчиками, ориентированных вдоль угла вытекания, которые могут быть расположены как в перпендикулярном направлении, так и в продольном (лучше использовать одновременно оба расположения, что позволит определить как затухание, так и поперечное нарастание). Как уже отмечалось, максимальное поперечное удаление датчика должно быть существенно меньше, чем расстояние от источника до плоскости его расположения (т.е. длина

используемого отрезка ДВ). Переходу от ПВ к БВВ в малой частотной окрестности, где действительный КЗ $n=1$ становится комплексным с $n' < 1$ соответствуют нефизические антиповерхностные волны [4]. Однако введение малых диэлектрических потерь для корректного решения ДУ в комплексной плоскости приводит к непрерывному переходу медленной слабовтекающей ПВ в БВВ. БВВ возможны в полых волноводах с импедансными диссипативными стенками, в волноводах типа полый канал (ВПК) с однослойной и многослойной (конечной и бесконечной) оболочками, а также в полых волноводах с фотонно-кристаллическими оболочками [83, 85–90]. Эти волны – вытекающие по отношению к полному каналу, где распространяется основная энергия, но втекающие по отношению к оболочке (поверхности диссипативной среды), куда втекает энергия из вакуума (канала). Такие слабо втекающие в оболочку волны используются для канализации энергии и передачи информации. По структуре на высоких частотах и на частотах, когда отражение от оболочки хорошее, они похожи на соответствующую быструю волну волновода с идеально проводящей стенкой. Последнюю можно представить в прямоугольном волноводе либо в виде двух (волна H_{10}), либо четырех плоских волн, а для произвольного волновода – в виде бесконечного (по одному из поперечных волновых чисел) спектра волн, идущих под углом $\theta(\omega)$ к оси волновода z со скоростью c и с волновым продольным числом $k_z = k_0 / \cos(\theta(\omega))$. Угол скольжения θ уменьшается с ростом частоты.

БВВ схематически можно представить в виде лучей, идущих со скоростью света c под углом θ к оси волновода рис. 1, что и делает продольную фазовую скорость (ФС) v_p больше c при скорости переноса энергии $v_p \approx c \cos(\theta)$, а ее математическое описание схоже с эффектом Вавилова-Черенкова (течет быстрый слабо затухающий ток поляризации, который, как и быстрые электроны, высвечивает энергию под заданным углом). Математические соотношения здесь такие же, как для поля нити

быстрого тока (формула (2.86) из [91]). Полная аналогия получается, если рассматривать быстрый ток с затуханием, которое можно определить из закона сохранения энергии.

В терагерцовом диапазоне все полые волноводы следует рассматривать как ВПК. Для ВПК с диссипативной оболочкой угол $\theta(\omega)$ целесообразно назвать углом вытекания из канала или углом втекания (скольжения) в оболочку. Угол распространения в оболочке $\theta'(\omega)$ обычно несколько больше, хотя возможен и случай $\theta'(\omega) < \theta(\omega)$ (например, в случае плазменной оболочки при $0 < \varepsilon' < 1$ и малых потерях $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$, или когда канал не полый, а состоит из оптически более плотного материала с существенно меньшими потерями, чем в оболочке). Последнему случаю соответствуют обычные волоконные линии передачи. ВПК являются волноводами многомодовыми. Каждой моде соответствует свой угол втекания в оболочку [90]. Отличие БВВ в ВПК от БВВ в ДВ лишь в том, что в первом случае энергия запасена в полном канале, а во втором – в диэлектрике. Имеет место аналогия структуры поля ПВЦ со структурой поля ВПК (см. также [83–86, 90]), если в последнем отбросить отраженные лучи и перейти в пределе к бесконечному каналу. При этом отметим, что ПВЦ не создает отраженную волну [4], а ее потери малы (как и потери ВПК) при КЗ порядка единицы. Потери сильно замедленной ПВЦ уже существенные, в отличие от обычно малых (в рабочем диапазоне) потерь волн в ВПК.

Поскольку долгое время превалировало мнение (да и сейчас, по-видимому, оно весьма распространено), что быстрыми могут быть только БВВ в открытых ДВ и волны в полых (экранированных) волноводах, а все медленные волны являются поверхностными, то существование быстрых ПВЦ попало под вопрос. В этом плане особо следует отметить недавно опубликованную работу [27]. Далее будет показано, что основные выводы этой работы относительно невозможности существования быстрой ПВЦ ошибочны (сама работа также содержит ряд неточностей). Что касается

быстрых и медленных волн в открытых ДВ и ВПК, то в последнее время получены численные и аналитические решения соответствующих комплексных ДУ [82–86], показывающие, что при наличии малых потерь медленная ПВ в ДВ становится слабо вытекающей под малым углом. Ее угол вытекания и потери падают с уменьшением частоты до критической ($n = n' = 1$), на которой волна становится плоской, скользящей под нулевым углом со скоростью света, после чего волна становится быстрой вытекающей, а потери начинают расти. При дальнейшем уменьшении частоты до нуля угол вытекания доходит до значения $\theta(0) = \pi/2$ (при таком угле волна теряет волновые свойства и имеет бесконечный КЗ). КЗ $n'(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ для волны с отсечкой не достигает нуля, а имеет минимум на некоторой частоте $n'(\omega_m) < 1$, после чего с уменьшением ω начинает возрастать, на сверхнизких частотах становится больше единицы и растет далее. Обычно $n'(\omega_m) \ll 1$. При этом с уменьшением частоты растут и потери (величина $n''(\omega) = -\text{Im}(n(\omega))$). Указанные сверхнизкие частоты соответствуют условию $k_0 a \ll 1$ (a – поперечный размер ДВ). Таким образом, кроме БВВ возможны и медленные вытекающие волны (МВВ). Указанный факт был также доказан для идеального (недиссипативного) ДВ в виде плоской пластины с $\varepsilon = \text{const}$, рис. 2. При этом строгие ДУ [4, 82] решались точно сходящимися итерационными методами [84] (невязка ДУ была порядка машинной погрешности). МВВ, в отличие от БВВ, вообще непригодны ни для канализации энергии вдоль оси, ни для передачи информации. Они идут почти под прямым углом, имея огромные радиационные потери, и практически высвечиваются с любого весьма малого участка ДВ. Реально они присутствуют в экспоненциально малой окрестности у источника (например, импульсного дипольного излучателя), имеющего сверхнизкие частоты в спектре. Замедление вдоль оси в такой волне связано с практически полным вытеканием в поперечном направлении и есть следствие закона сохранения энергии. Это проще всего показать для недиссипативного плоскостойкого волновода, возбуждаемого

точечным гармоническим диполем, окружив точку возбуждения сферой большого радиуса. На сверхнизких частотах в силу малой продольной ФС в MBV радиационные потери существенно преобладают над диссипативными. Аналогичный факт – превращение на низких частотах быстрой вытекающей в оболочку волны волновода ПКД в медленную сильно вытекающую волну – был также доказан путем численного итерационного счета для ряда структур, в частности, для плоскопараллельного волновода (ППВ) с металлическими (медными) стенками [85]. Такой волновод, как и любые полые волноводы, можно рассматривать как ПКД, поскольку металлическая оболочка описывается как комплексный диэлектрик (плазма). Указанный эффект наблюдается существенно ниже идеальных (соответствующих отсутствию диссипации) частот отсечек практически при приближении к нулевой частоте. Рассматриваемые несобственные моды фактически не являются распространяющимися, а больше соответствуют резонаторным модам соответствующих стоячих волн (ППВ – резонатору Фабри-Перро) с импедансными стенками. При диссипации в стенках реальных частот отсечек нет. Очень быстрая квазисобственная волна ниже частоты отсечки идеальной структуры становится несобственной и распространяются с большим затуханием и малой фазовой постоянной k'_z . С дальнейшим уменьшением частоты величина k'_z уменьшается быстрее ω , ФС $v_p = \omega/k'_z$ уменьшается от значений, существенно превышающих c , до нуля (на нулевой частоте), замедление стремится к бесконечности в нуле, а групповая скорость (ГС) $v_g = (\partial_\omega k'_z)^{-1}$ превышает скорость света и стремится к бесконечности. Естественно, такая волна не является собственной. Физически стремление $n' \rightarrow \infty$ здесь связано с тем, что при $\omega \rightarrow 0$ волна втекает в металл (скин-слой стремительно увеличивается) и движется в нем с сильным замедлением, поскольку для металла $|\varepsilon| \rightarrow \infty$. Итерационный метод весьма удобен для анализа дисперсии вытекающих и втекающих мод (для втекающей в металлический провод ПВЦ он применен в [4]). Во-первых, на очень высоких

частотах решение известно приближенно аналитически (для ДВ это поверхностные моды с полем, почти втянутым в диэлектрик, а для ПКД есть приближенные аналитические формулы, основанные на большом коэффициенте отражения ($|R| \rightarrow 1$ при малом угле скольжения луча [90])). Это позволяет их использовать на больших частотах в качестве начальных приближений, а далее спускаться вдоль дисперсионной ветви по частоте. При этом в качестве начального значения итераций при небольшом уменьшении частоты берется точно вычисленное значение на предыдущей несколько более высокой частоте. Во-вторых, итерационные алгоритмы устойчивы и гарантируют точное решение, причем в большинстве случаев итерационный процесс сходится, а если нет – его всегда можно модифицировать к сходящемуся процессу. Итерационное решение позволяет получать и четко классифицировать комплексные моды.

По поводу поверхностных втекающих и вытекающих мод можно констатировать следующее. Открытые краевые задачи электродинамики на собственные значения в общем случае несамосопряженные, за исключением идеализированного случая собственных поверхностных мод, удовлетворяющих условиям на бесконечности. При диссипации все краевые задачи несамосопряженные. Возрастающие на бесконечности моды являются несобственными. Строго поверхностные медленные собственные моды есть абстрактные (идеальные) решения для недиссипативных сред и структур (как и собственные волноводные моды идеальных волноводов), к которым могут приближаться по структуре поля реальных слабо втекающих поверхностных (затухающих при поперечном удалении) мод ДВ с малой диссипацией. Такие моды, переходящие в собственные при исключении потерь, обычно называют квазисобственными. Эти медленные моды переходят в быстрые и сильно вытекающие моды при снижении частот ниже критических значений, соответствующих $n=1$. Ниже критических частот вытекающие моды комплексные (затухающие в направлении распространения), даже если изначально рассматривать недиссипативные среды. Дальнейшее снижение

частоты приводит к достижению минимумов замедления, после чего с уменьшением ω до нуля вытекание начинает превалировать над распространением и вытекающая мода становится медленной. Такую медленную моду можно рассматривать как моду, втекающую в оболочку (аналогичную волне Зоммерфельда-Ценнека). Таким образом, вытекающая мода может быть как быстрой, так и медленной [83, 84] (этот факт не акцентировался в литературе), причем при росте частоты от нуля до больших значений мода сначала медленная, затем быстрая, а затем опять медленная. Поверхностная мода ДВ с малой диссипацией слабо втекающая. В волноводах типа ПКД и полых металлических волноводах при таком же возрастании частоты от нуля мода сначала медленная с огромными потерями и сильно вытекающая из канала (втекающая в оболочку), а затем становится быстрой слабо вытекающей с малыми потерями. Переход происходит в области критической частоты идеального волновода, после чего вытекание из канала и потери уменьшаются, а $n \rightarrow 1$ снизу при $\omega \rightarrow \infty$. При этом волна “отрывается” от стенок, и вся энергия идет практически в вакууме (канале) почти без потерь. При этом волновод становится многомодовым. Таким образом, волны в рассмотренных структурах схожи по свойствам с ПВЦ. Быстрые и медленные втекающие ПВЦ возможны и в гиперболических средах (метаматериалах), например, в проволочных фотонных кристаллах (ФК) [20, 22, 87, 92]. Такие структуры в виде двумерно-периодических (2-D-P) структур из металлических проволочек с наноразмерным сечением являются хорошими устройствами (подобными многопроводным линиям) для передачи волн СВЧ, терагерцового и инфракрасного диапазонов. Энергия слабо втекает в металлические стержни извне, а волна распространяется под небольшим углом к стержням и имеет малое поперечное и продольное затухание. Вдоль границы раздела такого гиперболического метаматериала и вакуума может идти ПВЦ в виде волны Дьяконова.

Теперь следует определить, что же такое ПВЦ. Во-первых, это ПВ, причем в диссипативных структурах, что весьма важно. Диссипация

обязательна: при ее отсутствии плоская ПВЦ превращается в волну, падающую без отражения под углом Брюстера [4]. Для ПВ и вытекающих волн в случае диссипации чисто экспоненциально затухающего или чисто колеблющегося поля нет: поперечные компоненты волновых векторов комплексные. Это же имеет место и для ПВЦ. И тут мы подходим к основному вопросу: каков тип этой волны? Ответ такой: ПВЦ – это волна *втекающая*, а именно, втекающая из свободного пространства в диссипативную структуру (поверхность, оболочку). Известно явное и ясное упоминание об этом основном свойстве ПВЦ – работа [4]. Сначала у Л.А. Вайнштейна речь идет о том, что при переходе к пределу нулевого импеданса полуплоскости “волна Ценнека превращается в плоскую волну, скользящую вдоль идеально проводящей плоскости. Поэтому волну Ценнека можно рассматривать как обычную плоскую волну, *ставшую поверхностной благодаря просачиванию части энергии в почву*.... Для хороших проводников параметр ζ мал, поэтому волновое число h мало отличается от k при распространении волны Ценнека над сушей и тем более над морем. Поверхностный характер этой волны выражен весьма слабо: так как обычно для почвы $|\zeta| \ll 1$, то $|p| \ll k$, и вертикальная протяженность волны Ценнека весьма велика по сравнению с длиной волны. Передающие антенны поверхностной волны Ценнека фактически не возбуждают, и она для распространения радиоволн над сушей или морем реального значения не имеет; поле радиальных волн имеет совершенно иную структуру” ([4], стр. 219). В этой цитате из Л.А. Вайнштейна и далее в цитатах курсив наш. Соответственно в ней обозначено: ζ – нормированный импеданс полуплоскости, k – волновое число (у нас далее k_0), h , p – комплексные продольное и поперечное волновые числа (у нас далее k_x и k_z). Заметим, что в [4] в поперечной области решение ищется (в наших обозначениях) в виде $\exp(-pz)$, тогда как у нас далее в виде $\exp(ik_z z)$. Результат, естественно, от этого не зависит (в отличие от утверждения из [27]). Интересна еще одна

цитата из [4]: при отсутствии диссипации “величина $p = i\zeta k$ становится чисто мнимой, и можно положить $\zeta = \cos \varphi$, $p = ik \cos \varphi$, $h = k \sin \varphi$, откуда видно, что формулы (60.02) и (60.03) определяют плоскую волну, падающую под углом φ на плоскость $x = 0$. Из формулы (15.12) следует, что для такой волны $R_1 = 0$, поскольку она падает под углом Брюстера...”. В [4] R_1 означает коэффициент отражения от полуплоскости и приняты такие же обозначения координат, как в [78], тогда как у нас далее координаты обозначены, как в работе [27] (переход осуществляется заменой $x \leftrightarrow z$, $H_y \leftrightarrow -H_y$). Созданная реальными источниками ПВЦ – это КПВ. Для создания идеальной ПВЦ на плоскости необходим бесконечный (и бесконечно удаленный от точки наблюдения) плоский источник, а в цилиндрическом случае – бесконечный линейный источник [56, 61, 63, 64, 68, 69]. В случае неплоской замкнутой поверхности и конечного источника (например, в системе Земля-ионосфера) КПВ собственно волной не является, а более соответствует некой квазисобственной моде резонатора (точнее – спектру таких мод [9, 19, 58, 88]), причем на больших расстояниях от источника ее поле приближенно можно представить как ПВ. Поверхностный характер такой КПВ более сильно выражен у границы ионосферы, где она напоминает волну типа шепчущей галереи (из-за отрицательной кривизны угол втекания увеличивается по сравнению с плоским случаем). Поверхностный характер КПВ у Земли придает втекание ее энергии в земную поверхность, а отчасти рефракция и дифракция (для длинных волн), при этом угол втекания меньше, чем для плоского случая.

Казалось бы, приведенных утверждений из классического учебника по электродинамике и цитированный литературы вполне достаточно, чтобы не поднимать вопрос о существовании ПВЦ [27]. Ведь никто же не ставит под вопрос существование плоских волн, хотя их, как и ПВЦ, нереально возбудить антенной конечных размеров (тем более диполем) на конечном расстоянии, а идеальные такие волны – математическая абстракция. Тем не

менее, разложения по плоским волнам повсеместно используется. Из поля диполя (задача Зоммерфельда) поле ПВЦ можно выделить приближенно ([91], формула (4.63)) также в виде квазиволны (см. также [6, 10, 35, 36, 68]). Точно так же из поля диполя, помещенного под поверхность земли, нельзя строго выделить вытекающую волну, хотя что-то ей подобное в некоторой области физически будет образовываться. БВВ, МВВ ниже частоты отсечки, а также быстрые и медленные ПВЦ математически есть несобственные волны, а физически – квазиволны (как и плоские волны), т.е. в чистом виде их возбудить нельзя. Для возбуждения таких КПВ необходимы не слишком удаленные весьма протяженные и мощные источники. В этом их отличие от медленных ПВ, которые можно возбуждать достаточно удаленными источниками (в пределе отсутствия диссипации – бесконечно удаленными источниками с конечной мощностью).

ПВЦ более сложно возбудить, нежели принять. Но при приеме возникает проблема ее выделения из обширного пространственного спектра волн. Чем длиннее трасса и больше антенна, тем лучше формируется ПВЦ, но тем сильнее она и затухает. По-видимому, наилучший ее естественный возбудитель – вертикальный удар линейной молнии с длиной несколько километров. Но обычно ударов молний почти одновременных много, да и происходят они в разных местах, причем излучают такой обширный спектр мод и по всем меридианальным направлениям, что выделить “чистую” ПВЦ нельзя. По структуре поля ПВЦ близка к волнам, образующим свехнизкочастотные резонансы Шумана – резонансы концентрического сферического резонатора Земля – ионосфера (слой Хевисайцда) [88]. Эти резонансы можно считать образованными возмущенными диссипацией кабельными модами концентрического сферического волновода (резонатора), втекающими в Землю (океан, почву) и ионосферу. Первый резонанс Шумана наблюдается на минимальной частоте примерно 7.83 Гц (максимальные частоты чуть более 8 Гц). Учитывая, что эта частота примерно равна скорости волны, деленной на периметр окружности Земли,

получаем $K_3 \ n' = 0.9949$. Правда, следует учесть сферический характер обеих поверхностей, что дает дополнительное ускорение, а также и дополнительное замедление в нижних слоях атмосферы за счет их влагосодержания [88]. При влажности в несколько процентов и низкочастотной ДП дистиллированной атмосферной воды 81 такое замедление может достигать нескольких процентов [88]. Волна у границы ионосферы более быстрая, поэтому волна движется как целое без искажений. Энергия из центра сферического волновода втекает в указанные концентрические сферические оболочки. Такая волна движется вдоль двух криволинейных поверхностей и имеет конечную поперечную протяженность полого канала (примерно 80–90 км). В этом ее отличие от “классической” ПВЦ над плоскостью и сходство с волнами волноводов типа ПКД. Она переходит в две классические ПВЦ при уменьшении длины волны. Однако для слишком коротких волн ионосфера почти прозрачна.

Подведем итог исторического обзора. Впервые дисперсионное уравнение для ПВ в электродинамике получил Зоммерфельд (1899), решая задачу о дифракции плоской волны на неидеальном проводе. Это волна, втекающая в провод и обычно медленная. Ее также часто относят к ПВЦ, называя волной Зоммерфельда-Ценнека. Можно найти частоту, параметры диссипативного диэлектрического стержня и его радиус, когда такая волна станет быстрой. Эта волна может перейти как в медленную, так и в быструю классическую ПВЦ при бесконечном увеличении отношения радиуса стержня к длине волны в зависимости от значений ДП, поэтому вышеприведенное название оправдано. Соответственно Зоммерфельд в 1901 указал и на возможность ПВ вдоль плоской импедансной поверхности, экспоненциально затухающей при удалении от нее. Его идею развил его ученик, Дж. Ценнек. В чем же заслуга Ценнека? Он впервые решил задачу на собственные значения методом сшиваания и получил комплексное ДУ, которое сейчас является классическим (например, для медленных ПП). В узком смысле все решения этого ДУ (быстрые и медленные) следует

трактовать как ПВЦ. В 1941 г. Фано объяснил аномалии Вуда распространением ПВ, и часто такую фактически ПВЦ называют волной Фано. Возбуждать ПВ в металлических пленках начали в 60-70-х гг. (Отто, 1969, Кречман, 1971). На протяжении более ста лет подход Ценнека используется в огромном числе работ для различных структур. В частности, поверхностные поляритоны часто относят к ПВЦ [30, 78]. В широком же смысле все волны, втекающие в некие поверхности (не обязательно плоские) можно трактовать как ПВЦ, причем не важно, быстрые они, или медленные. Важно, что они втекающие. В этом смысле существование резонансов Шумана есть убедительное подтверждение существования волн Ценнека в многослойных концентрических сферических волноводах, замкнутых в резонатор, хотя такая задача требует отдельного рассмотрения. Заметим, что при отсутствии втекания указанная мода вырождается в концентрическую кабельную моду между идеально проводящими сферами подобно тому, как классическая ПВЦ превращается в плоскую волну, скользящую вдоль плоскости. Переход к плоскому случаю соответствует бесконечному возрастанию радиуса (или уменьшению длины волны). Последнее ухудшает условие хорошо проводящих сфер. Ценнек также внес вклад и в исследование распространения волн в канале между Землей и ионосферой.

Несмотря на устоявшееся определение ПВЦ в указанном обобщенном смысле, авторы [27] отказывают Дж. Ценнеку в праве на волну его имени, отдавая ему как бы честь как *“хорошему исследователю”* и только, мотивируя это тем, что ПВЦ точно не выделяется как собственная волна из спектрального представления Зоммерфельда и тем, что ее ГС превышает скорость света c ! Указанный факт для ПВЦ, правда, в работе [27] не доказывается (хотя это так, см. [32]), но последнее и не важно – важен сам *аргумент*. Ссылка на ГС и на то, что она превышает *“дозволенный физический предел”* в диссипативных средах и структурах звучит в настоящее время весьма странно как основной аргумент *“против”*. Превышает – ну и что? Это обнаружил Эренфест еще в 1910 г. [93]. И потом

это многократно показывалось десятками, а то и сотнями авторов [93–96]. Обычно в диссипативных средах или структурах, если $v_p > c$, то $v_g < c$, и наоборот: $v_p < c$, $v_g > c$, но есть случаи, когда $v_p < c$, $v_g < c$ (например, волны в дистиллированной воде на низких частотах), или $v_p > c$, $v_g > c$, как для ПВЦ. Авторы [27] утверждают, что смена знака происходит синхронно, что для морской воды неверно (см. далее и [32]). В диссипативных средах и структурах ГС не имеет никакого реального физического содержания, разве что имеет свой математический (кинематический) смысл как скорость переноса биений двух бесконечно близких по частоте монохроматических волн, как ее когда-то и определил Стокс [94]. Причем малая ли диссипация или большая – особого значения не имеет: ее не должно быть вовсе, что реально не бывает. ГС, как ее до Стокса определил Гамильтон, имеет смысл скорости переноса энергии *монохроматической* волной только для Гамильтоновых систем (абсолютно недиссипативных). Именно для них доказана теорема Леонтовича-Лайтхилла-Рытова [89, 94, 96, 97]. Однако таких систем в природе нет. Есть только некоторые приближения к ним. В монохроматической волне нет частотной группы волн, зато вводится их ГС! Для частотного волнового пакета ГС не определяет скорость переноса энергии [94–96]. Можно признать, что ГС служит удобным инструментом при анализе дисперсии (собственных волн) в идеальных недиссипативных структурах (например, в идеально проводящих ЗС, бесстолкновительной плазме), да и только. Для квазисобственных волн приближенное использование ГС требует весьма малых потерь, а для несобственных волн ее использовать нельзя. Она удобна для анализа разделения областей нормальной и аномальной дисперсии в диссипативных средах и структурах. Однако отрицательная (по отношению к ФС) ГС не всегда означает отрицательную дисперсию, т.е. требуется определять скорость переноса энергии v_e , причем знаки v_e и v_g могут быть разными.

Интересно отметить, что для реальных (конечных и диссипативных) структур ФС всегда меньше бесконечности, тогда как ГС может достигать бесконечности и менять в ней знак (см. далее). Обычно волну с противоположными направлениями ФС и ГС называют обратной, хотя правильнее тут вместо ГС использовать v_e . Бесконечная ФС получается, например, в волноводе с идеальными стенками на частоте отсечки: волна движется в поперечном направлении (поперечный резонанс), и вся бесконечная стенка освещена при данной фазе одновременно. Это же относится к падению резкого фронта плоской волны под нулевым углом на некую плоскую поверхность: вся бесконечная поверхность одновременно освещена, т.е. фаза в поперечном направлении движется мгновенно. Если же угол падения α мал, получаем конечную скорость распространения волны поляризации $v_p = c / \sin(\alpha) > c$. Если теперь заменить гипотетическую плоскую волну сферической волной большого радиуса R с резким фронтом, получим при нормальном падении ($\alpha = 0$) для ФС распространения от начальной точки касания фронта в начальный его момент выражение $v_p = \sqrt{c^2 + 2Rc/t}$. Здесь $v_p = \infty$ только в одной центральной точке и только в момент касания. Но это некая абстрактная ситуация с нестационарной волной и резким фронтом. ГС стремится к бесконечности в реальных волнах, например, при переходе через запрещенные зоны в ФК и ЗС с бесконечно малыми потерями [98], превышает c и обращается в бесконечность на дисперсионных кривых плазмонных мод и в ряде других случаев [89, 96, 99–101].

Приведенное выше весьма обширное введение содержит ряд хорошо известных результатов и фактов, но некоторые из результатов весьма слабо освещены в литературе, или на них вообще не акцентируется внимание в обширном числе публикаций, посвященных рассмотренным вопросам. Его можно было бы опустить, но оно, на наш взгляд, весьма важно и нужно для понимания вопросов, связанных с ПВЦ. Оно необходимо для физического анализа приведенного ниже и полученного Дж. Ценнеком ДУ. Понятие

“втекающая волна” мы несколько лет используем в лекционных курсах и попытались найти его в литературе. Кроме описания ПВЦ он введен в [4] на стр. 223 для волн ДВ. Там же введена несобственная “антиповерхностная” волна, нарастающая экспоненциально в поперечном направлении при $n > 1$. При $n = 1 - \delta$, $\delta \ll 1$ для каждой моды формально имеются решения в виде двух таких быстрых с разными показателями экспоненциального нарастания мод. При дальнейшем уменьшении частоты получаются вытекающая и втекающая моды, а n становится комплексным. Указанный переход при численном счете весьма резкий (рис. 2). Введение потерь приводит к тому, что поверхностная волна становится слабо втекающей и при уменьшении частоты сразу переходит в вытекающую. Кроме как в [4] рассмотренная классификация пока найдена в работе [102] и имеет тот же смысл, что и выше. Там рассмотрены собственные, несобственные нефизические (по терминологии [4] – “антиповерхностные”) и несобственные вытекающие и втекающие (физические) моды ДВ. В англоязычной литературе имеется термин *скользящие* (gliding) волны. Его можно использовать, но термин “втекающая волна” более правильно отражает физическую суть явления, т.к. скольжение еще не означает втекание: оно может быть под нулевым углом, или под малым углом к идеально проводящей плоскости с отражением.

2. Плоская граница раздела двух сред

Рассмотрим конфигурацию рис. 1, такую же, как в [27]: при $z > 0$ вакуум (для простоты далее полагаем $\varepsilon_1 = 1$), при $z < 0$ – среда с потерями, граница раздела – плоскость $z = 0$. Будем пользоваться вектор-потенциалом, а не вектором Герца, и ищем решение для ТМ-моды в виде $\mathbf{E}_l = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} [\text{grad} \bullet \text{div} + k_0^2\varepsilon_l] \mathbf{z}_0 A_{lz}$ (в [78] решение получено непосредственно для полей, выраженных через компоненту H_y). Здесь произведение дифференциальных операторов представляем так: $\text{grad} \bullet \text{div} = \nabla \nabla \cdot = \nabla \otimes \nabla$. Жирная точка означает последовательное применение операторов, простая

точка – скалярное произведение, а знак \otimes – тензорное произведение векторов. Поверхностная волна распространяется вдоль оси x , поэтому удобно использовать следующий вид решения (от конкретного вида окончательные результаты не зависят, вопреки утверждению из [27]):

$$A_{l_z}(x, z, t) = A_{l_0} \exp(i\omega t - ik_x x + ik_{l_z} z), \quad (1)$$

где $l=1$ соответствует вакууму, $l=2$ – среде. Имеем $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $k_x = k'_x - ik''_x$,

$$k_{l_z} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_l - k_x^2}, \quad l=1,2. \quad (2)$$

Такая запись удобна для рассмотрения втекания волны из вакуума. Далее зависимость от времени в виде множителя $\exp(i\omega t)$ опускаем. Пока мы подходили к решению чисто формально. Теперь следует определиться со значениями квадратных корней (2). При используемой зависимости от времени в диссипативной среде $\varepsilon'' > 0$. Поскольку при распространении вдоль такой среды поверхностная волна должна затухать, то $k_x = k'_x - ik''_x$, $k'_x > 0$, $k''_x > 0$. Первое неравенство означает, что волна прямая (вдоль положительного направления x), а второе – что она затухает. Заметим, что именно неравенство $k''_x > 0$ определяет распространение волны (движение энергии) в положительном направлении x (показано на рис. 1 стрелкой). Аналогично представляем $k_{l_z} = k'_{l_z} - ik''_{l_z}$. Здесь важен выбор знаков реальных и мнимых частей. Ясно, что должно быть $k'_{1z} > 0$ и $k''_{1z} < 0$, $k'_{2z} > 0$. Первое и второе соотношения определяют втекание энергии в полуплоскость (энергия не может вытекать из диссипативной полуплоскости), а второе и третье – ПВ. Вытекающих и обратных волн в рассматриваемой структуре быть не может. В выражении для A_{l_z} из удобства выбран знак для k_{l_z} как для волны, падающей из вакуума. От него никак не зависит результат, который определяется выбором ветвей корней (2). Мы сначала будем считать, что и $\text{Re}(k_{2z}) = k'_{2z} > 0$ (далее будет показано, что может быть и $k'_{2z} < 0$). Условие $k''_{2z} > 0$ необходимо и соответствует диссипации (иначе амплитуда волны

нарастала бы с глубиной до бесконечности). В пользу выбранных соотношений говорят способы возбуждения реальных квазиволн. Это может быть вертикальный диполь над диссипативной полуплоскостью (задача Зоммерфельда), возбуждение ПП наклонным к металлической поверхности лазерным лучом, возбуждение рупором и т.п. Обсудим вопрос о знаке k_{1z}'' . Случай $k_{1z}'' > 0$ (экспоненциальное нарастание) формально возможен рис 1. Однако при этом волна должна либо быть вытекающей, либо обратной. Вытеканию должна соответствовать запасенная в структуре энергия, которая не может быть запасена на границе раздела, а вытекание из диссипативной полуплоскости невозможно. Следует различать волны обратную и противоположную (со значением $-k_x$), соответствующую источнику, расположенному справа (мы считаем, что бесконечно мощный и протяженный в поперечном направлении источник находится в вакууме при $x = -\infty$). Существование обратной волны для границы раздела физически невозможно. Заметим, что в обратной волне фаза идет вспять к движению энергии. Такая волна образуется за счет бесконечных в пространстве и времени отражений монохроматической волны, идущей от источника. Отражения происходят от неоднородностей (например в ЗС, в ФК), при этом из-за интерференции фаза движется вспять энергии (бесконечно удаленный влево источник действует бесконечно долго). В столкновительной (диссипативной) плазме при возрастании частоты от нуля до бесконечности ФС изменяется от нуля до максимального значения, превышающего c в районе плазменной частоты (дисперсия аномальная положительная), а затем уменьшается, стремясь к c сверху (дисперсия нормальная) [95, 99]. При этом ГС изменяется от бесконечности до малой величины, а затем растет, приближаясь к c снизу. Если же рассмотреть дисперсию Лоренца, то с ростом частоты дисперсия из нормальной переходит в аномальную (в окрестности резонанса), а затем опять становится нормальной. Аномальная положительная дисперсия с ростом частоты может стать аномальной

отрицательной (ФС и ГС имеют разные знаки), а затем опять положительной. ГС может превышать по величине c , а при большой силе осциллятора выполняется условие $\varepsilon' < 0$ [99, 100]. Это условие как здесь, так и для плазмы не означает наличие обратной волны. Действительно, для величины $k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon} = k'_z - ik''_z$ извлечение корня с учетом диссипации дает $k'_z > 0$, $k''_z > 0$. Таким образом, в однородной среде при аномальной отрицательной дисперсии v_e и v_g противоположно направлены. Исключение имеет место в так называемых искусственных одновременно отрицательных средах (изотропных метаматериалах), где в некотором диапазоне частот $\varepsilon' < 0$ и $\mu' < 0$. Для показателя преломления (индекса рефракции) $n = n' - in'' = \sqrt{\varepsilon\mu}$ такой среды при $n'' > 0$ (диссипация) возможен только случай: $n' < 0$, $n'' > 0$ (обратная волна). Однако условия $\varepsilon' < 0$, $\mu' < 0$ связаны с сильной дисперсией и резонансами, где обычно велики потери (в силу соотношений Крамерса-Кронига практическое отсутствие потерь вне резонансной области приведет к очень большим потерям в резонансной полосе). В частности, при $\varepsilon'\mu' = \varepsilon''\mu''$ (что вполне может иметь место) получаем $|n'| = n''$. Исследование ПВЦ на границах различных метаматериалов представляет отдельную и достаточно сложную задачу. В сильно диссипативных открытых слоистых волноведущих структурах конечных поперечных размеров возможны волны с ФС и ГС разных знаков, как и в средах при отрицательной аномальной дисперсии. Это, в частности, показано для многослойного плоскопараллельного ДВ с потерями (при наличии полупроводниковых слоев) [84], что также не означает наличие обратной волны, т.е. ГС также может быть противоположна скорости движения энергии v_e . Если же потерь нет, $v_g = v_e$ (например, в ЗС с идеальной проводимостью), но только для монохроматической волны. ГС не определяет движение импульса, не может быть введена точно даже для достаточно узкого спектра и может превышать c для некоторых законов дисперсии диссипативных и активных сред [93–96].

Объяснение экспоненциального затухания поля ПВ и нарастания БВВ при удалении от поверхности дает рис. 1, где сплошными линиями показаны лучи прямой втекающей волны, а пунктирными линиями – вытекающей прямой и обратной. В двух последних случаях плоскость $z=0$, вообще говоря, соответствует границе некоторой структуры. Для прямой волны в точку 1 приходит луч 1, которому соответствует большая амплитуда по сравнению с лучом 2, приходящем в более отдаленную точку 2 ($x_1 < x_2$). Для вытекающей волны (штриховые линии, стрелки вверх) имеем $x'_1 > x'_2$. Для обратной волны (штриховые линии, стрелки вниз), существующей в случае, когда среда 1 не вакуум, энергия и фаза движутся противоположно. Для ПВЦ нельзя накладывать условия излучения Зоммерфельда (также как и для вытекающих волн). Такая волна, хоть и есть решение задачи на собственные значения, причем убывающее на бесконечности в поперечном направлении, отдельно от источника не существует, причем не излучается, а приходит из бесконечности. Приблизненно структуру волны на конечной трассе может создать квазиплоская волна распределенного источника, скользящая к диссипативной полуплоскости под углом $\theta = \pi/2 - \varphi$, где угол падения φ типа Брюстера комплексный и играет роль волнового числа [4]. Дипольная антенна не является хорошим возбудителем ПВЦ. Более хорошо возбуждать должна рупорная антенна, направленная под соответствующим углом. Начальная амплитуда такой волны конечна, а волна затухает по мере распространения. При решении задач возбуждения открытых волноводов конечным источником, скажем, диполем, необходимо возникают несобственные квазиволны. Для конечных структур вытекающая квазиволна в поперечном направлении имеет сложную зависимость. Здесь имеет место аналогия с собственным полем открытого диэлектрического резонатора (ДР). Как известно, его поле убывает во времени и нарастает в пространстве (закон сохранения энергии) [82]. Но если ДР возбудить физически в момент $t = 0$ коротким импульсом, то говорить о поле резонатора можно только в области

$r_0 < ct$. Со временем эта область расширяется, причем вблизи резонатора поле имеет сложную структуру, затем оно может нарастать по закону $r^{-1} \exp(\omega'' r/c)$, но при приближении к r_0 спадает до нуля. Отмеченные моменты связаны с нестационарностью процессов и с конечностью пространственных областей, которые аппроксимируются гармоническими или бесконечными во времени процессами в бесконечной области. Здесь есть аналогия с плоскими электромагнитными волнами в вакууме и с нормальными модами волноводов. Это решения однородных уравнений Максвелла, но для их физического существования нужны бесконечно удаленные (в пространстве и времени) источники. Физически для создания плоской волны нужен бесконечно мощный бесконечно удаленный источник. В сферической системе координат решений однородных уравнений нет, а есть решения в виде сходящейся и расходящейся функций Грина (ФГ) – реакций от дельта-источников. Конечные же источники создают квазисферические волны [91].

Отметим еще один важный момент. Из физических соображений мы наложили четыре условия, тогда как для определения решения достаточно наложить только два. Поэтому два являются лишними. В качестве основных сначала мы будем использовать положительность реальных частей k_{1z} . Если при этом в некоторых областях параметров волна будет поверхностной, следовательно, это и есть математически существующая и удовлетворяющая всем физическим требованиям обычная ПВЦ. Можно наложить и условия существования поверхностной волны: $\text{Im}(k_{1z}) > 0$, $\text{Im}(k_{2z}) < 0$. Как показано далее, возможна и втекающая из вакуума поверхностная волна, для которой $k'_{2z} < 0$. Такая волна соответствует медленным и быстрым ПП – поляритонам, возникающим на границе плазмоподобных сред [75–80] при выполнении условий $|\varepsilon' + 1| < \sqrt{1 - \varepsilon''^2}$, $\varepsilon'' < 1$. Если $\varepsilon'' \ll 1$, то ПП очень медленный ($n' \approx n'' \approx 1/\sqrt{2\varepsilon''}$) при $\varepsilon' \approx -1$, и очень быстрый ($n' \approx n'' \approx \sqrt{\varepsilon''/2}$) – при $\varepsilon' \approx -\varepsilon''^2$.

Запишем теперь ДУ нашей задачи. Имеем компоненты полей:

$$E_{1x} = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} \partial_{xz}^2 A_{1z} = A_{10} (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} k_x k_{1z} \exp(-ik_x x + ik_{1z} z). \quad (3)$$

$$E_{lz} = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} [\partial_z^2 + k_0^2\varepsilon_l] A_{lz} = A_{l0} (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} [k_0^2\varepsilon_l - k_{lz}^2] \exp(-ik_x x + ik_{lz} z). \quad (4)$$

$$H_{ly} = -\partial_x A_{lz} = ik_x A_{l0} \exp(-ik_x x + ik_{lz} z). \quad (5)$$

Заметим, что (3) и (4) выражаются из (5) дифференцированием. Сшивание (3) и (5) дает $A_{l0} = A_{20}$, $k_{1z} = k_{2z} / \varepsilon$ или весьма простое (как отмечено в [27]) основное ДУ:

$$\sqrt{k_0^2 - k_x^2} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2} / \varepsilon. \quad (6)$$

Однако его анализ не совсем тривиален. При возведении (6) в квадрат находим явное решение для комплексного КЗ n :

$$n^2 = (n' - in'')^2 = k_x^2 / k_0^2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon'^2 + \varepsilon' + \varepsilon''^2 - i\varepsilon''}{\tilde{\varepsilon}^2} = \beta - i\alpha. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}^2 = (\varepsilon' + 1)^2 + \varepsilon''^2$, $\alpha = \varepsilon'' / \tilde{\varepsilon}^2 > 0$, $\beta = (\varepsilon'^2 + \varepsilon' + \varepsilon''^2) / \tilde{\varepsilon}^2$, n' – КЗ, n'' – коэффициент потерь. Такое возведение может дать ложные корни, что требует дальнейшего контроля. Собственно, наложение вышеприведенных дополнительных условия как раз и позволяет исключить ложные корни. Знаки у ε' и β могут, вообще говоря, быть любыми. Представление (7) сразу позволяет найти стандартным образом КЗ и коэффициент потерь:

$$n' = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{2}} > 0, \quad (8)$$

$$n'' = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta}{2}} > 0. \quad (9)$$

Это решение соответствует прямой затухающей вдоль направления распространения волне. Считаем, что ДУ (6) соответствует условиям $\text{Re}(k_{1z}) > 0$, $\text{Im}(k_{1z}) > 0$ и $\text{Re}(k_{2z}) > 0$, $\text{Im}(k_{2z}) < 0$. Это означает, что величина $1 - n^2 = 1 - n'^2 + n''^2 + 2in'n'' = 1 - \beta + i\alpha$ должна находиться либо в первом, либо во втором квадрантах комплексной плоскости, а величина $\varepsilon - n^2 = \varepsilon' - n'^2 + n''^2 + i(2n'n'' - \varepsilon'')$ – в третьем или в четвертом квадрантах. Если $\beta > 1$, то волна медленная. Поэтому первая величина для быстрой волны всегда находится в первом квадранте. Общее условие такое: первому

квадранту соответствует $\beta < 1$, а для второго квадранта $\beta > 1$. Поэтому достаточно анализировать только второе условие, которое перепишем так:

$$\varepsilon - n^2 = \varepsilon' - \beta + i(2n'n'' - \varepsilon'') = \varepsilon' - \beta + i(\alpha - \varepsilon'') . \quad (10)$$

Из него следует, что решения (для быстрой и медленной ПВЦ) существуют, если $\alpha < \varepsilon''$, что эквивалентно условию $\tilde{\varepsilon}^2 > 1$. Оно выполняется всегда, если $\varepsilon'' > 1$. Если же $\varepsilon'' < 1$, то из решений следует выбросить диапазон значений ДП $-1 - \varepsilon'_1 < \varepsilon' < -1 + \varepsilon'_1$, где $\varepsilon'_1 = \sqrt{1 - \varepsilon''^2}$. Именно для этого достаточно узкого диапазона не существует обычной ПВЦ. Однако ему соответствуют решения в виде ПП (поляритонов). Если $\varepsilon'' \ll 1$, то это диапазон $-2 + \varepsilon''^2/2 < \varepsilon' < -\varepsilon''^2/2$. Если $\varepsilon'' = 1 - \delta$ и $\delta \ll 1$, то $\varepsilon'_1 = \sqrt{2\delta}$, и тогда это диапазон в окрестности $\varepsilon' \sim -1$.

Найдем условия, когда ПВЦ быстрая. Имеем $n' < 1$, откуда $0 < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 2 - \beta$. Здесь, по крайней мере, $\beta < 2$ или $\varepsilon'^2 + 3\varepsilon' + 2 + \varepsilon''^2 > 0$, что всегда выполняется при $\varepsilon'' > 1/2$. Однако это не есть искомое условие. На самом деле из (8) видно, что условие более жесткое: $\beta < 1$, и еще должно выполняться неравенство $0 < \alpha^2/4 < 1 - \beta$. Отсюда следуют два условия для быстрой волны: $\varepsilon' > -3/4$ и $-1 < \varepsilon' \leq -3/4$ при $\varepsilon'' < (\varepsilon' + 1)^3 / (-3/4 - \varepsilon')$. Если $\varepsilon'' < 1$, то для обычных быстрой и медленной волн следует исключить область существования ПП:

$$-1 - \sqrt{1 - \varepsilon''^2} < \varepsilon' < -1 + \sqrt{1 - \varepsilon''^2} , \quad (11)$$

если имеет место их пересечение. Поэтому для $\varepsilon'' \geq \sqrt{1 - 1/16}$ быстрая ПВЦ существует всегда при $\varepsilon' > -3/4$. Если же $\varepsilon'' < \sqrt{1 - 1/16}$, то быстрая ПВЦ существует при $\varepsilon' > -1 + \sqrt{1 - \varepsilon''^2}$. При $\varepsilon'' \rightarrow 0$ и $\varepsilon' \rightarrow 0$ имеем бесконечно быструю волну: $n' \rightarrow 0$ (волна падает под нулевым углом Брюстера, ее фаза вдоль границы постоянна, следовательно $v_p \rightarrow \infty$).

Рассмотрим другой метод определения областей существования быстрой ПВЦ. Обозначая $\zeta = 1 + \varepsilon'$, имеем $\zeta^3 + p\zeta + q > 0$, где $p = \varepsilon''^2$, $q = -\varepsilon''^2/4$, $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = (\varepsilon''^6/27 + \varepsilon''^4/64) > 0$. В данном случае вещественное кубическое уравнение

$$\zeta^3 + p\zeta + q = 0 \quad (12)$$

имеет один действительный корень ζ_1 и два комплексно сопряженных. Этот корень разделяет область быстрых и медленных волн. При $\varepsilon' > -1 + \zeta_1$ волны быстрые, а при меньших значениях – медленные (с учетом диапазона (11) их перехода в ПП). На основе формул Кардано пишем $\zeta_1 = \chi_+ + \chi_-$, $\chi_{\pm} = \sqrt[3]{\varepsilon''^2/8 \pm \sqrt{Q}}$. В случае очень больших потерь $\varepsilon'' \gg 1$, имеющих место в проводящих средах на низких частотах, $Q \approx \varepsilon''^6/27$, $\chi_{\pm} \approx \pm \frac{\varepsilon''}{27^{1/6}} (1 \pm \sqrt{27}/(24\varepsilon''))$, $\zeta_1 \approx 1/4$, т.е. $\varepsilon' > -3/4$. В случае малых диэлектрических потерь $\varepsilon'' \ll 1$ имеем $Q \approx \varepsilon''^4/64$, $0 < \zeta_1 \approx \sqrt[3]{\varepsilon''^2/4} \ll 1$, поэтому граница лежит в районе -1 и чуть правее. Учитывая условие (11), имеем $\varepsilon' > -1 + \sqrt{1 - \varepsilon''^2} \approx -\varepsilon''^2/2$, т.е. на самом деле граница лежит в районе нуля. Оба анализа дали одинаковые результаты. Итак, при любых потерях быстрая волна всегда существует при $\varepsilon' > 0$. При $\varepsilon' < -2$ всегда существует медленная волна. В случае $\varepsilon'' > 1$ медленная волна существует, если $\varepsilon' < -3/4$, а при $\varepsilon'' < \sqrt{1 - 1/16}$ эта граница смещается влево: $\varepsilon' < -1 - \sqrt{1 - \varepsilon''^2}$. Имеется еще узкий диапазон, где существует обычная медленная ПВЦ: $\sqrt{1 - 1/16} < \varepsilon'' < 1$ и $-1 - \sqrt{1 - \varepsilon''^2} < \varepsilon' < -3/4$. На рис. 3 приведены графики замедления для ПВЦ ($\tilde{\varepsilon}^2 > 1$). Кривые искусственно разорваны условием $\tilde{\varepsilon}^2 > 1$. В областях разрыва существуют ПП ($\tilde{\varepsilon}^2 < 1$). Рис. 4 соответствует области перехода обычной втекающей быстрой и медленной ПВЦ во втекающие из вакуума волны ПП, которые также могут быть быстрыми и медленными (дисперсионные кривые непрерывны). Условие $k'_{2z} < 0$ для ПП связано с наличием границы, при этом фаза вдоль луча в среде движется против движения энергии рис. 1, тогда как вдоль границы волна прямая.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Величина α ограничена снизу нулем, к которому она приближается, если $\varepsilon' \neq -1$ при $\varepsilon'' \rightarrow 0$ или при $\varepsilon'' \rightarrow \infty$, а также в случае ограниченных потерь при $|\varepsilon'| \rightarrow \infty$. Она стремится к

бесконечности только если $\varepsilon' = -1$ и $\varepsilon'' \rightarrow 0$. Величина β отрицательная или нуль, если $|\varepsilon' + 1/2| \leq \sqrt{1/4 - \varepsilon''^2}$ и $\varepsilon'' < 1/2$. В этом случае при малых потерях возможны очень быстрые волны. Переход от очень медленной к очень быстрой волне весьма резкий (рис. 4). Величина $\beta = 1$, если $\varepsilon' = -1$. В этом случае $\alpha = 1/\varepsilon''$, поэтому волна медленная, а при малых диэлектрических потерях очень медленная с большими потерями на распространение. В области $-1 < \varepsilon' < 0$ могут быть как быстрые, так и медленные волны. Случай $\varepsilon' = 0$ уже рассматривался при малых ε'' . При больших потерях он приводит к быстрой волне, идущей почти со скоростью света. При $\varepsilon' > 0$ волна всегда быстрая, а при $\varepsilon' < -2$ – медленная, при этом с ростом $|\varepsilon|$ скорости этих волн приближается к c снизу и сверху.

В работе [4] при выводе ДУ поле в среде не рассматривается, а накладывается импедансное условие Леонтовича следующим образом:

$E_{1x} = -Z_0 Z H_{1y}$, где $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$, или в виде

$$k_{1z} / k_0 = \sqrt{1 - k_x^2 / k_0^2} = \sqrt{1 - n^2} = Z = \varepsilon^{-1/2}. \quad (13)$$

Используется величина $p = -ik_{1z}$ и другая зависимость от времени. Формулы (6) и (7) совпадут с аналогичными соотношениями из [4] только при малых по модулю импедансах $|\zeta| \ll 1$ (больших $|\varepsilon|$). Тогда вместо (7) имеем: $n = k_x / k_0 = \sqrt{1 - \varepsilon^{-1}}$. Согласно этой формуле, если комплексное значение ε приближается к единице по любому пути, $n \rightarrow 0$, что не верно. Поступим так, как в [4]. Пишем $\varepsilon = |\varepsilon| \exp(-i\varphi)$, $\varepsilon' = |\varepsilon| \cos(\varphi)$, $\varepsilon'' = |\varepsilon| \sin(\varphi)$, $\tan(\varphi) = \varepsilon'' / \varepsilon'$, φ – угол диэлектрических потерь. Считаем $|\varepsilon| \gg 1$. Тогда имеем разложения

$$n = \sqrt{1 - |\varepsilon|^{-1} \exp(i\varphi)} \approx 1 - \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-1} \exp(i\varphi) - \frac{1}{8} |\varepsilon|^{-2} \exp(2i\varphi) + \dots, \quad (14)$$

$$n' \approx 1 - \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-1} \cos(\varphi) - \frac{1}{8} |\varepsilon|^{-2} \cos(2\varphi) + \dots \quad (15)$$

$$n'' = \frac{1}{2} |\varepsilon|^{-1} \sin(\varphi) + \frac{1}{8} |\varepsilon|^{-2} \sin(2\varphi) - \dots \quad (16)$$

Для проводящих сред на частотах, где реализуется скин-эффект, имеем $\varphi \approx \pi/2$, $n' \approx 1 + |\varepsilon|^{-2}/8 > 1$, $n'' = |\varepsilon|^{-1}/2$. Используя формулу (15), из условия $n' < 1$ получаем в первом приближении $\cos(\varphi) > 0$, т.е. $\varepsilon' > 0$. Во втором приближении имеем результат [4]:

$$\cos^2(\varphi) + 2|\varepsilon|\cos(\varphi) - 1/2 > 0,$$

или $\cos(\varphi) > |\varepsilon|^{-1}/4$, т.е. $\varepsilon' = |\varepsilon|\cos(\varphi) > 1/4$, что ошибочно, поскольку мы получили условие $\varepsilon' > -3/4$. Здесь нельзя использовать разложение по малому параметру $|\varepsilon|^{-1}$, поскольку в области перехода от быстрых волн к медленным величина $|\varepsilon|^{-1}$ не обязательно мала. В силу приближенности разложения рассмотрим точное решение (13). Вместо (7) пишем $n = n' - in'' = \sqrt{1 - |\varepsilon|^{-1} \exp(i\varphi)} = \sqrt{\beta - i\alpha}$, $\beta = 1 - |\varepsilon|^{-1} \cos(\varphi)$, $\alpha = |\varepsilon|^{-1} \sin(\varphi)$. Из условия $n' < 1$ имеем $\varepsilon' > |\varepsilon|^2 / (2\varepsilon'')^2 \approx 1/4$, что при $|\varepsilon| \gg 1$ также дает $\varepsilon' > 1/4$. Можно получить и такую оценку $\cos(\varphi) > \sqrt{1 + 4|\varepsilon|^2} - 2|\varepsilon| \approx |\varepsilon|^{-1}/4$. Очевидно, результаты из [4] следует считать приближенными и пригодными для хорошо проводящих сред при не слишком больших частотах.

Приведенные выше формулы получены с использованием вектор-потенциала, ориентированного перпендикулярно границе раздела сред. Как известно, в этом случае результаты получаются наиболее просто и компактно. Однако можно использовать любую ориентацию вектор-потенциалов (векторов Герца). В нашем случае удобно взять ось x : $\mathbf{E}_l = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} [\text{grad} \bullet \text{div} + k_0^2\varepsilon_l] \mathbf{x}_0 A_{lx}$, где

$$A_{lx}(x, z) = A_{l0} \exp(-ik_x x + ik_{lz} z), \quad (17)$$

$$E_{lx}(x, z) = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon_l)^{-1} A_{l0} [k_0^2\varepsilon_l - k_x^2] \exp(-ik_x x + ik_{lz} z), \quad (18)$$

$$H_{ly} = \partial_z A_{lx} = ik_{lz} A_{l0} \exp(-ik_x x + ik_{lz} z). \quad (19)$$

Сшиванием получаем $k_{1z}A_{10} = k_{2z}A_{20}$, $A_{10} = A_{20}k_{2z}/k_{1z}$, что дает $n^2 = k_x^2/k_0^2 = [(k_{2z}/k_{1z}) - 1]/[(k_{2z}/k_{1z}) + 1/\varepsilon]$ и $\sqrt{1-n^2} = \sqrt{\varepsilon - n^2}/\varepsilon$, откуда имеем соотношения (6) и (7).

3. Волна Ценнека над морской поверхностью

Предположим сначала, что поверхность моря идеально плоская, а ионосфера находится достаточно высоко, чтобы ее можно было не учитывать. Это накладывает некие ограничения на длину волны ПВЦ и коэффициент затухания от поверхности. На длине 80 км должно укладываться несколько (или несколько десятков) длин волн, и на ней волна должна затухать хотя бы на 2–3 порядка. Для частот $f \geq 30$ КГц ($\lambda \leq 10$ км) сферичность земной поверхности сказывается слабо, но коэффициент поперечного затухания требует оценки. На крайне низких частотах (КНЧ) сферичность и ионосферу учитывать надо. Как было сказано ниже, первый резонанс Шумана $f \sim 7-10$ Гц следует отнести к резонансу на ПВЦ. Низшая кабельная мода, соответствующая двум идеально проводящим сферическим концентрическим поверхностям с радиусами $R_1 = 6368$ (средний радиус Земли) и $R_2 = 6448$ (минимальный радиус начала слоя Хевисайда) дает частоту резонанса $f = 10.176$ Гц (см. [88]). Такая мода в силу сферичности быстрая и имеет продольную (меридиональную компоненту) электрического поля, т.е. не является модой строго поперечной. Втекание в земную поверхность и ионосферу делает ее поверхностной, а некоторое замедление она получает из-за содержания влаги в нижних слоях атмосферы [88]. Тем не менее, мода быстрая. Наиболее эффективно ее возбуждают многокилометровые вертикальные удары молний в земную поверхность, которых при грозах большинство (порядка 80%). Каждый удар возбуждает расходящиеся во все стороны на всех частотах ПВЦ, огибающие Землю. По одному пробитому каналу может пройти до десяти разрядов в секунду. ПВЦ соответствует лишь первый резонанс Шумана. Высшие резонансы образуются волнами,

отраженными от земной поверхности и ионосферы. Эти волны идут под большими углами к горизонту, в силу чего их фазовые скорости в разы превышают скорость света (для второго и третьего резонанса примерно в 2 и 3 раза соответственно). Из-за изменения параметров атмосферы и ионосферы, а также из-за возбуждения в разных точках и распространения по разным направлениям, наблюдаемые частоты резонансов “плывут”.

Поскольку электрофизические параметры земной поверхности сильно варьируются, будем рассматривать ПВЦ над морем, где их вариация не столь велика. Берем среднюю проводимость морской воды на постоянной токе $\sigma_0 \sim 4$ См/м, среднюю соленость 34.72 ‰. Морская вода содержит в основном NaCl, ряд других солей и ингредиентов. С достаточно хорошим приближением считаем, что имеем раствор хлористого натрия концентрации 0.6 молей на литр. Соответственно получаем квадраты плазменных частот: $\omega_{pNa}^2 = 2.7251 \cdot 10^{25}$ и $\omega_{pCl}^2 = 1.7656 \cdot 10^{25}$ Гц. С хорошим приближением можно считать частоты столкновений ω_c для обоих компонент одинаковыми, и ввести среднюю плазменную частоту: $\omega_p = 4.738 \cdot 10^{12}$ Гц. ДП дистиллированной (чистой) воды до ТГц описывается формулой Дебая:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\chi}{1 + \omega^2 / \omega_{c0}^2} - i \frac{\chi \omega / \omega_{c0}}{1 + \omega^2 / \omega_{c0}^2}. \quad (20)$$

Здесь $\omega_{c0} = 1/\tau = 100$ ГГц, $\tau \sim 10^{-11}$ с – время релаксации, восприимчивость $\chi = 80$, поэтому $\varepsilon(0) = 81$. В такой воде могут образовываться кластеры за счет водородных связей, поэтому для волны низкой мощности формула (20) может быть неточной. Рассматриваемый нами аналог морской воды в виде двухкомпонентной плазмы мы заменили на однокомпонентную. Для нее с учетом вклада (20) пишем

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\chi \omega_{c0}^2}{\omega^2 + \omega_{c0}^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2} - i \left[\frac{\chi \omega \omega_{c0}^2}{\omega^2 + \omega_{c0}^2} + \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 + \omega_c^2)} \right]. \quad (21)$$

Из формулы (21) при $\sigma_0 = \varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega_c = 4$ См/м следует достаточно высокая частота столкновений $\omega_c = 4.427 \cdot 10^{13}$ Гц, что связано с весьма плотным

расположением молекул воды. В 1907 г. электронная теория дисперсии в основном уже была развита Лоренцем, но электродинамика плазмы только зарождалась, поэтому для анализа комплексной ДП использовалась приближенная формула $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' - i\sigma_0/(\omega\varepsilon_0)$, в которой всегда считалось, что $\varepsilon' > 1$. Как видно, в силу большой частоты столкновений плазменные свойства воды проявляются слабо, и третьим членом в формуле (21) можно пренебречь для всех частот, где она применима (линии колебательного спектра у воды появляются в инфракрасном диапазоне, начиная с $\lambda^{-1} = 1594.59 \text{ см}^{-1}$). Если $\varepsilon''(\omega)$ описывается квадратной скобкой в (21), то вполне можно пользоваться формулой $\varepsilon(\omega) = 81 - i\varepsilon''(\omega)$. Для распространения поверхностных волн над плоской поверхностью моря следует рассматривать длины волн, существенно превышающие волнение спокойного моря (от нескольких до десятков сантиметров). Резонансные частоты кластеров воды лежат в миллиметровом диапазоне. В этом диапазоне при малых интенсивностях, не способных разорвать водородные связи кластеров, вода может быть аномально прозрачна. Поэтому будем анализировать ПВЦ в диапазоне длин волн $\lambda \geq 1 \text{ м}$.

На частоте $f = 30 \text{ КГц}$ $\varepsilon' = 80.9885$, $\varepsilon'' = 2.69017 \cdot 10^6$. При таких значениях ПВЦ над морем идет практически со скоростью света, но все же быстрая: $1 - n' = 5.647 \cdot 10^{-12}$, $n'' = 1.859 \cdot 10^{-7}$, $1 - \beta = 1.133 \cdot 10^{-11}$, при этом $\alpha = 3.717 \cdot 10^{-7}$. Волна в воздухе идет почти горизонтально под углом -0.025° (угол падения 1.57036) и почти вертикально втекает в море (угол падения $8.62 \cdot 10^{-4}$). Ее горизонтальное затухание $1.16 \cdot 10^{-7} \text{ дБ/км}$, а вертикальное затухание в воздухе $2.64 \cdot 10^{-4} \text{ дБ/км}$, т.е. она простиралась бы за пределы ионосферы, если бы последней не было. На самом деле волна втекает также и в ионосферу, что надо учитывать при анализе. Интересно, что на частоте 8 Гц $n' = 1 - 8.175 \cdot 10^{-19}$, $\alpha = 9.9 \cdot 10^{-11}$. Такая волна почти не затухает, многократно обходя Земной шар. Глубина ее проникновения в морскую воду порядка 100 м . Примерно такая же будет и глубина проникновения в нижние слои ионосферы (принимая в

качестве их параметров $\omega_p = 50$ МГц, $\omega_c = 10$ КГц). Если бы указанная граница ионосферы была плоской и резко выраженной, то вдоль нее могли бы распространяться как быстрые, так и медленные ПВЦ рис. 5. При $\omega \approx \omega_p / \sqrt{2}$ наблюдается резкий резонанс на ПП (рис. 5, 6). При таких параметрах на низких частотах волна медленная. Максимальное замедление $n' = 21.44743$ соответствует частоте $f = 5.626188$ МГц. Ей соответствуют максимальные потери, чуть сдвинутые вниз (частота 5.626172 МГц). Переход от медленных волн к быстрым происходит на частоте 5.93313 МГц. В случае морской воды медленных волн нет (рис. 7). На частоте 1 МГц ее вертикальное затухание (вниз к Земле) равно 5.45 дБ/км. Вертикальное же затухание ПВЦ над морем 1.17 дБ/км, поэтому можно констатировать, что взаимодействующие (на частотах до сотен КГц) с ионосферой и земной поверхностью низкочастотные ПВЦ на частотах, порядка 1 МГц разделяются на две волны: быструю у Земли и медленную у границы ионосферы. На частотах выше 6 МГц обе волны быстрые, при этом в ионосферу волна втекает сильнее, что обусловлено ее размытой границей и отрицательной кривизной.

Эффективное (с большим КПД) возбуждение и прием ПВЦ над морем целесообразно осуществлять направленным коническим рупором прямоугольного сечения с размерами раскрыва порядка десятков длин волн, возбуждаемым, например, коаксиально-волноводным переходом с волной H_{10} и направленным под малым углом к поверхности. Такой рупор создает квазиплоскую волну. На частоте 300 МГц раскрыв может быть порядка 10×10 м². Такие метровые волны распространяются с большим затуханием 0.103 дБ/м, т.е. на длине в 25 км под горизонтом ослабление (без учета расходимости волны от рупора) составит 2575 дБ. Вертикальное затухание 0.79 дБ/м, что на высоте 10 м над уровнем моря дает ослабление почти в 10 раз. Угол скольжения луча (наклон рупора) уже существенный: 0.1296 или 7.42 градуса, а волна еще не очень быстрая: $n' = 0.99961$. В силу большого

затухания метровые волны почти не пригодны для ЗГР ПВ. Для более коротких волн резко возрастает затухание и влияния волнения моря, а для более длинных волн растут размеры антенн и ухудшается локация объектов. Рассмотрим упомянутый в [27] береговой ЗГР ПВ “Подсолнух-Э”. Для его частоты 10 МГц при длине волны 30 м затухание равно 0.67 дБ/км при вертикальном затухании 0.0118 дБ/м. Наверное, для ЗГР ПВ удобны частоты от 30 МГц (затухание 2.24 дБ/км) до 5 МГц. Известны случаи загоризонтного приема телевизионных сигналов, особенно над поверхностью моря. Ионосфера в их передаче уже не играет роли, и никакого другого объяснения, кроме аномально сильной положительной атмосферной рефракции, образования волноводного канала вблизи поверхности моря (например, за счет испарения) и ПВЦ не существует. Как правило, в БЗГР используют системы вертикальных диполей. Весьма эффективно возбуждать ПВЦ горизонтальным полуволновым диполем или системой таких диполей, помещенных в фокус двумерного параболического экрана. Горизонтальная диаграмма направленности (ДН) будет соответствовать ДН диполя, а в вертикальной плоскости ДН весьма узкая. Для сужения горизонтальной ДН можно использовать боковые экраны.

Рассмотрим вопрос о ГС для ПВЦ. Для волны над морем расчетные значения для разности $1 - n_g$, где $n_g = c/v_g = n' + \partial_\omega n'$ – групповое замедление, приведены на рис. 7. Видно, что для быстрой ПВЦ всегда $v_g > v_p > c$, и нигде эти величины не “переходят через значение c ” (ср. [27, 32]), разве что в инфракрасном диапазоне, тем более одновременно. Здесь интересен пример с движением плоской волны внутри океана. Как известно, связь с подводными лодками осуществляется в диапазонах частот ОНЧ (VLF) $3 \div 30$ КГц и КНЧ (ELF) $30 \div 3000$ Гц [68]. Рассмотрим диапазон $1 \div 30$ КГц при глубинах погружения лодки соответственно $100 \div 10$ м. На частоте 1 КГц замедление в море равно 6352, а на частоте 30 КГц – 1160. При этом $v_g \approx 2v_p$. Передать речь на таких частотах нельзя, поэтому передаются коды. Энергия в импульсе,

переносящим сообщение, движется в морской воде примерно с ФС как и энергия в монохроматической волне: $v_e \approx v_p$ [99] (дисперсия в морской воде, как и в дистиллированной, аномальная положительная). ГС здесь, как скорость биений, существенно опережает импульс, а соответствующие ей колебания движутся между предвестником и импульсом и никак не могут передавать сообщение. Заметим, что скорость переноса энергии v_e ПВЦ всегда меньше c . Действительно, втекающая в море часть волны идет почти нормально к поверхности с огромным замедлением. Эта часть волны практически не переносит энергию вдоль поверхности, а вся ее энергия поглощается. Часть волны, идущая над поверхностью, скользит под малым углом втекания $\theta(\omega)$, который растет с частотой. В связи с этим увеличиваются потери и фазовая скорость, но падает скорость переноса энергии: $v_e(\omega) \approx c \cos(\theta(\omega))$. Эта формула такая же, как в ВПК или в идеальном волноводе. Она означает, что волна и энергия в вакууме идет под углом θ к направлению ее переноса. Физически отличие лишь в том, что в ПВЦ нет отражения от границы. Доказать эту формулу весьма просто, вычислив усредненный по z поток вектора Пойнтинга и плотность энергии, используя формулу Умова. При этом в силу сказанного выше усреднять можно только по положительным z , т.е. в воздухе, где нет проблемы определения плотности энергии. Эта формула получена в работе [32], написанной как опровержение результатов [27]. Со всеми результатами [32] можно согласиться, кроме использования (для уточнения v_e) формулы Бриллюэна для плотности энергии в воде, которая верна только для гипотетических сред без потерь [99, 100, 102] (что на основных результатах [32] не сказалось). Плотности энергии в плазме, в дистиллированной и морской воде приведены в [89, 96, 99–101]. Весьма малую добавку к теряемой в воде плотности энергии можно определить, и скорость будет несколько меньше $c \cos(\theta(\omega))$, но эта добавка достаточно громоздкая. Моделирование связи с подводными лодками на ПВЦ, возбуждаемой на

суше на большом горизонтальном удалении, требует решения задачи о движении ПВЦ вдоль моря до положения лодки с малым затуханием, а затем определения затухания на глубине для заданной частоты (эти величины для указанных частот составляют соответственно 1.323 дБ/м и 7.246 дБ/м.). Для определения напряженности электрического поля на глубине можно решать задачу нормального движения плоской волны вглубь моря при заданной ее напряженности на поверхности (эту задачу решают студенты по курсу электродинамики), поскольку ПВЦ вглубь идет почти нормально. Быстрая в горизонтальном направлении волна становится медленной при распространении в глубину. Прием подобных сигналов есть подтверждение существования быстрой ПВЦ. Основная проблема здесь – необходимы большие антенны и мощные сигналы. Первый в мире ОНЧ-передатчик «Голиаф» для связи с подводными лодками был построен в Германии в 1943 году, перевезён после войны в СССР. В 1949 – 1952 годах он был восстановлен в Нижегородской области и эксплуатируется до сих пор. Мегаваттный ОНЧ-передатчик для связи с подводными лодками ВМФ России работает в Белоруссии. Советская система «ЗЕВС» работает на Кольском полуострове (Североморск-3) на частоте 82 Гц (длина волны – 3656 км), американская «Seafarer» (Клэм Лэйк, Висконсин) была спроектирована и построена для частоты 76 Гц (длина волны – 3944,64 км). Построить полуволновую дипольную антенну с размером в четверть радиуса Земли не реально. Используют два очень больших электрода, заглубленных в землю с низкой удельной проводимостью и разнесенных на несколько десятков километров (для системы «ЗЕВС» – 60 км). Сквозь сушу волны КНЧ идут практически без потерь, и часть суши между электродами и в их окрестности также работает как антенна, возбуждая ПВЦ. Такая ПВЦ может многократно огибать Земной шар и передавать сигнал в любую точку Земли и мирового океана. Факт включения системы «ЗЕВС», например, фиксировался научной станцией в Антарктиде. Однако КПД антенн таких КНЧ систем крайне низок: при мощности в несколько или в несколько

десятков мегаватт (мощность электростанции) выходной сигнал имеет мощность несколько ватт, что оказывается вполне достаточным. Весьма странно в научной литературе находить утверждения, что ПВЦ до сих пор “не обнаружена”, или что она “не существует”, когда уже несколько десятилетий на ней осуществляется связь!

Для ПВЦ под плазмой ионосферы в пренебрежении влиянием земной поверхности (для чего достаточно в (21) положить $\chi = 0$ и взять частоты $\omega_p = 50$ МГц и $\omega_c = 10$ КГц) ГС ведет себя весьма сложно. Она изменяется в бесконечных пределах, поэтому построить один соответствующий график невозможно. На рис. 6 приведен график дисперсии, который наглядно показывает поведение ГС: $v_g = \partial_{k_x} \omega = c \tan(\varphi) / \omega$, где φ – угол наклона касательной к кривой. На низких частотах $v_g \approx c$, $v_g < c$ и уменьшается с их ростом, достигая весьма малых значений вблизи резонанса. На кривой образуется характерный “клюв”, в конце которого ГС резко (практически от нулевых значений) достигает бесконечности и становится отрицательной и малой, опять начиная возрастать по модулю. При этом во всем указанном диапазоне волна медленная. Видно, что ГС несколько раз меняет знак, переходя через бесконечные значения. То, что ГС направлена противоположно ФС, совсем не означает (как уже отмечалось), что волна обратная. Здесь энергия переносится в сторону движения фазы и не меняет своего направления при изменении частоты. Также почти нулевые или бесконечные значения ГС совсем не означают движение энергии с нулевой или бесконечной скоростями. Там, где ГС переходит через бесконечное значение (что имеет место около максимумов замедления) максимальны и потери волны (хотя потери в плазме $\varepsilon'' \approx 2^{-3/2} \omega_c / \omega_p$ весьма малы). Интересен предельный случай бесконечно малых потерь ($\omega_c \rightarrow 0$). В этом случае вблизи плазмонного резонанса $v_g \rightarrow 0$, переходит через бесконечность и меняет знак в бесконечно малом частотном диапазоне. Аналогично в ФК и ЗС при бесконечно малых потерях ГС до границы полосы непропускания (bandgap)

достаточно точно соответствует скорости движения энергии v_e , стремясь к нулю при приближении к границе снизу. Очень малые потери делают возможным распространение волн с малыми волновыми числами и огромными потерями в полосе непропускания, при этом ГС почти мгновенно изменяется от нуля до огромных значений, стремясь к бесконечности при стремлении потерь к нулю. При переходе через эту зону ГС опять становится малой и растет, причем, если переход осуществлен на обратную ветвь дисперсионной характеристики, она меняет знак. Аналогичная картина имеет место и в волноводах ниже критических частот. Таким образом, даже малые (бесконечно малые) потери для волн в структурах лишают ГС обычно приписываемо ей смысла скорости переноса энергии в монохроматической волне. По поводу скоростей движения импульсов и ГС можно рекомендовать работы [94–96, 104]. Удивляет, насколько глубоко понятие ГС в указанном выше неверном смысле абсолютизировалось и укоренилось в сознании многих ученых, преподавателей и студентов без относительно того, какие волны они рассматривают. Так, с одной стороны авторы [27] пишут о *“пределе исчезающе малых потерь”* и о введении ГС *“... по крайней мере для областей с предельно малым затуханием, где групповая скорость волны хорошо определена”*, а с другой стороны приводят *“как бесспорный физический аргумент”* факт, связанный с *“запрещенным физикой переходом групповой скорости”* (через c). Интересно, как же физика запрещает такой переход? О таком переходе, кроме настоящей работы, можно, например, посмотреть в [93–96, 99, 100].

4. Волна Зоммерельда-Ценнека вдоль диэлектрического цилиндра (провода)

Рассмотрим цилиндрическую волну вдоль диэлектрического цилиндра радиуса r . ДП считаем произвольной, в том числе описывающей метал. Волна азимутально симметричная, поэтому метод сшивания [4] дает ДУ

$$\kappa_0 r K_0(\kappa_0 r) / K_1(\kappa_0 r) = -\varepsilon^{-1} \kappa r J_0(\kappa r) / J_1(\kappa r) = \Phi(\kappa r). \quad (22)$$

Здесь реальная часть поперечного волнового числа в вакууме $\kappa_0 = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} = \kappa'_0 - i\kappa''_0$ положительная, поэтому медленная ПВ втекает в цилиндр и затухает при больших ρ как $\exp(-\kappa'_0\rho)/\sqrt{\rho}$ (функция Макдональда выбрана для удобства). Внутри цилиндра $\kappa = \sqrt{k_0^2\varepsilon - k_z^2}$, при этом знак κ не играет роли (функция $\Phi(\kappa r)$ четная). Для длинных волн $\lambda \gg r$ в случае проводящей среды $|\varepsilon|^{-1} \ll 1$, параметры $\kappa_0 r$, κr и обе части равенства (22) малы. Из (22) получаем (см. [4]) итерационную формулу $(r\kappa_0)^2 = \Phi(\kappa r) [C + \ln(r\kappa_0/2)]^{-1} - r\kappa_0$, которую удобно решать, разложив правую часть (22) по малому параметру: $\Phi(\kappa r) = (2\varepsilon)^{-1} (1 - (\kappa r)^2/4 - \dots)$. В [4] вместо сшивания наложено импедансное условие Леонтовича, что приводит к другой функции $\Phi(\kappa r) = -i\varepsilon^{-1/2} k_0 r$, не зависящей от κ . Сразу отметим, что налагать условие Леонтовича можно на квазиплоской поверхности, т.е. при $\lambda \ll r$. Сравнение итерационных решений ДУ (22) и ДУ из [4] Дано на рис. 8. Совпадение имеет место в области не слишком низких частот, а на сверхнизких частотах, когда поле проникает в цилиндр, точное ДУ (22) дает большее замедление. При этом растет и затухание, поскольку часть цилиндрической волны движется в проводе. С ростом частоты волна убыстряется и может стать быстрой при переходе к почти плоскому случаю $\lambda \ll r$ и соответствующих значениях ε . Действительно, используя в (22) асимптотику при больших значениях аргумента, получаем $\tan(\kappa r - \pi/4) = -\varepsilon^{-1} \kappa / \kappa_0$. Теперь следует учесть, что волна идет вдоль отрицательного направления большого радиуса r и затухает, т.е. κ имеет отрицательную мнимую часть, поэтому $\tan(\kappa r - \pi/4) \rightarrow -1$. Отсюда получаем $\sqrt{k_0^2\varepsilon - k_z^2} / \sqrt{k_0^2 - k_z^2} = \varepsilon$, или ДУ (6), т.е. волна Зоммерфельда переходит в волну Ценнека. В общем случае ДУ (22) определяет комплексные втекающие E_{0m} волны круглого ДВ. Возбуждение ПВ Зоммерфельда и поляритонов с произвольной азимутальной зависимостью при скользящем падении плоской волны на диэлектрический цилиндр рассмотрены в работе [30].

5. Втекающие квазиволны вдоль цилиндрических и сферических поверхностей

Реально возбуждение волн в многослойной системе концентрических сферических слоев Земля-ионосфера приводит к волнам типа резонансов, связанных с источниками [9, 58, 88]. Решения в сферической и цилиндрической системах координат разлагаются по меридиональным и азимутальным периодическим функциям действительных углов (сферическим и цилиндрическим гармоникам). При изменении их значений на 2π решение меняться не должно, однако при этом “изолированная волна” обходит вокруг Земли и затухает. Выделить такую одиночную волну, комплексный волновой вектор которой связан с действительными углами, невозможно. Далее это будет показано на простом примере. Поэтому правильнее говорить о вынужденных резонансах. Возбуждение концентрического многослойного сферического резонатора источником приводит к убыванию поля при удалении от последнего, при этом частота действительная. Для квазисобственных же колебаний (образованных указанными квазиволнами) частоты комплексные при действительных углах. Поэтому выделение затухающей КПВ, не связанной с источником и распространяющейся при действительной частоте, должно сопровождаться переходом от действительных углов к комплексным. Рассмотрим такую КПВ, бегущую вдоль экватора. Считаем, что в меридиональном направлении волна не меняется. Это соответствует возбуждению антенной с узкой ДН (на сфере соответствующую систему координат всегда можно выбрать). Для простоты КПВ будем рассматривать в цилиндрической системе координат, считая, что она не зависит от координаты z (направления вдоль меридиана). Иначе говоря, это цилиндрическая волна вдоль азимута (или меридиана), что позволяет ввести кривизну поверхности. Электрическое поле имеет радиальную и азимутальную компоненты, поэтому будем использовать магнитные векторы Герца $\mathbf{A}_l^m = \mathbf{z}_0 A_l \exp(-im\varphi) Z_{lm}(\kappa_l \rho)$, $l = 0, 1$ в цилиндрической

системе. Здесь для вакуума ($l=0$) $Z_{0m}(\kappa_0\rho)=K_m(k_0\rho)$, а для цилиндра $Z_{1m}(\kappa_1\rho)=J_m(k_0\sqrt{\varepsilon}\rho)$. Как будет показано далее, необходимо учесть внешнюю оболочку (ионосферу). Учет же многослойности приводит к громоздким ДУ. Пусть волна идет вдоль азимута с комплексным волновым вектором $\mathbf{k}=k[\mathbf{y}_0\cos(\varphi)-\mathbf{x}_0\sin(\varphi)]$, где $k\approx k_0$. Удобно ввести азимутальную зависимость $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{s})$, где \mathbf{s} – вектор, имеющий направление касательной с длиной $s=R\varphi$. Отсюда имеем комплексный индекс $m=kR\approx 2\pi R/\lambda$. Для метровых и километровых волн он большой по модулю. При длине волны КПВ $\lambda=10$ м имеем $m\approx 4\cdot 10^6$. Сшивая поля E_φ , E_z , получаем ДУ

$$K'_m(k_0R)/K_m(k_0R)=\varepsilon^{-1/2}J'_m(k_0\sqrt{\varepsilon}R)/J_m(k_0\sqrt{\varepsilon}R). \quad (23)$$

Решить его в общем случае при произвольной проницаемости и частоте весьма проблематично из-за необходимости вычислять комплексные функции Бесселя очень больших комплексных индексов и аргументов. При не слишком длинных волнах можно воспользоваться импедансным условием, что приводит к уравнению

$$K'_m(k_0R)/K_m(k_0R)=i/\sqrt{\varepsilon}. \quad (24)$$

Для ПВЦ над морем в широком диапазоне частот $\varepsilon\approx -i\varepsilon''$, $\sqrt{\varepsilon}\approx(1-i)\sqrt{\varepsilon''}/2$, $\sqrt{\varepsilon''}\gg 1$, $|n|\approx n'\approx 1$. Покажем, что в принятых предположениях решений ДУ (23), (24) в виде волн, идущих почти со скоростью света, нет. В случае больших и почти действительных индексов $m=k_0R/n\approx k_0R$ асимптотическое разложение с учетом двух членов ([105], п. 9.7) левой части (24) дает оценку $-(t\tilde{z})^{-1}(1+t(1-t^2)/(2m))$. Здесь $\tilde{z}=1/n$, $t=1/\sqrt{1+\tilde{z}^2}$. Малый второй член дает поправку на зависимость от радиуса. Отбрасывая его, получаем значение $-\sqrt{1+n^2}$. Таким образом, правая часть (24) мала по модулю, а левая часть имеет модуль порядка $\sqrt{2}$. Правая часть (23) при больших ε'' стремится к правой части (24). Причина отсутствия решений в том, что уравнения (23) на самом деле есть характеристическое уравнение квазимод H_{m0} открытого цилиндрического ДР. Высокодобротными моды могут быть только при

$\varepsilon' \gg 1$, $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$. В нашем случае $\varepsilon'' \gg \varepsilon'$. За счет кривизны КПВ “отрывается” от поверхности и излучается. Такой ДР имеет радиационные и огромные диссипативные потери. Решение k_0 уравнения (24) во всех случаях комплексное с существенной мнимой частью, поэтому использованные выше разложения неприменимы. Для получения добротных колебаний и КПВ с малым затуханием следует использовать модель с двумя импедансными границами $\rho = R$ и $\rho = \tilde{R} = R + h$. Соответствующая двумерная цилиндрическая модель многослойной структуры Земля – ионосфера может быть получена на основе матриц передачи [88] четвертого порядка с учетом мод Е и Н. Чтобы не рассматривать поле в слоях (средах), предположим, что обе границы имеют малые по модулю нормированные импедансы $\varsigma_l = (1+i)\varsigma_{ls}$, $\varsigma_{ls} = (2\varepsilon'')^{-1/2}$, $l=1,2$. Тогда приближенное ДУ имеет вид

$$\frac{J'_m(k_0 R) - i\varsigma_1 J_m(k_0 R)}{J'_m(k_0 \tilde{R}) + i\varsigma_2 J_m(k_0 \tilde{R})} = \frac{Y'_m(k_0 R) - i\varsigma_1 Y_m(k_0 R)}{Y'_m(k_0 \tilde{R}) + i\varsigma_2 Y_m(k_0 \tilde{R})}. \quad (25)$$

При $\varsigma_1 = \varsigma_2 = 0$ (25) есть характеристическое уравнение для собственных частот квазимод $H_{m/0}$ коаксиального резонатора. В общем случае это приближенное характеристическое уравнение для соответствующих квазисобственных мод. Как известно, разделение мод при ненулевых импедансах происходит только при $m=0$, поэтому решение следует дополнить полями, соответствующими компоненте электрического вектор-потенциала A_z^e . Для указанных мод при малых импедансах добавки малы, поэтому для упрощения использовано уравнение (25). Сказанное относится и к приближенным уравнениям (23), (24). Считаем, что $h \ll R$ (реально $h/R \sim 1/64$), при этом величина $k_0 h$ не мала. Для моря на частоте 1 МГц $\varsigma_{ls} \approx 0.5 \cdot 10^{-3}$. Для упрощения анализа будем считать, что ионосфера идеально проводящая, т.е. что потерь на излучение и поглощение в ней нет. Тогда ДУ (25) приобретает вид

$$\frac{J'_m(k_0 R) - i\varsigma_1 J_m(k_0 R)}{Y'_m(k_0 R) - i\varsigma_1 Y_m(k_0 R)} = \frac{J'_m(k_0 \tilde{R})}{Y'_m(k_0 \tilde{R})}. \quad (26)$$

Будем сначала считать m действительным и большим, а k_0 комплексным. В окончательных результатах перейдем к действительным k_0 и комплексным m . Воспользуемся формулами п. 9.3 из [105]. Имеем $J_m(m) \approx \alpha m^{-1/3}$, $Y_m(m) \approx \beta m^{-1/3}$, где $\alpha = 2^{1/3} 3^{-2/3} / \Gamma(2/3)$, $\beta = -2^{1/3} 3^{-1/6} / \Gamma(2/3)$. Отсюда сразу следует, что при $h \rightarrow 0$ и $m \rightarrow k_0 R$ ДУ превращается в тождество. Обозначим $k_0 \tilde{R} = mz$, $z = \tilde{R} / (Rn)$. Пишем $k_0 R = m + \delta$, считая $\delta = m(1/n - 1) \ll 1$, что справедливо для не очень высоких частот. Представляя $k_0 \tilde{R} = m + \delta'$, видим, что величина $\delta' = \delta_1 + m(h/R)/n$ не является малой, что делает невозможным разложение по ней. Для вычисления производных функций Бесселя в правой части (26) воспользуемся формулой

$$Z'_m(mz) = [Z_{m-1}((m-1)z_1) - Z_{m+1}((m+1)z_2)] / 2.$$

Здесь $z_1 = zm/(m-1)$, $z_2 = zm/(m+1) > 1$. Используя формулу 9.3.3 из [105] имеем

$$J'_m(mz) \approx \gamma^{5/6} 3^{-1} \sqrt{2/(\pi n)} \sin(m\gamma^3/3 - \pi/4).$$

Здесь $\cos(\gamma) = 1/z$, $\gamma \approx \sqrt{2h/R(1 - \delta/(2k_0 h))} \approx 0.17$. Аналогично

$$Y'_m(mz) \approx -\gamma^{5/6} 3^{-1} \sqrt{2/(\pi n)} \cos(m\gamma^3/3 - \pi/4).$$

При вычислении мы положили $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma$, поскольку реально в тригонометрических функциях используются кубы этих малых величин. Разложим функции Бесселя до второго порядка по δ , а их производные до первого (что дает одинаковый порядок убывания по степеням m):

$$J_m(k_0 R) \approx J_m(m) + \delta J'_m(m) + (\delta^2/2) J''_m(m), \quad J'_m(k_0 R) \approx J'_m(m) + \delta J''_m(m).$$

Аналогичные разложения пишем для функций Неймана:

$$Y_m(k_0 R) \approx Y_m(m) + \delta Y'_m(m) + (\delta^2/2) Y''_m(m), \quad Y'_m(k_0 R) \approx Y'_m(m) + \delta Y''_m(m).$$

Вычислим производные, используя асимптотические разложения Дебая:

$$J'_m(m) = J_m(m) - J_{m+1}(m) \approx \alpha m^{-1/3} - \pi^{-1/2} 2^{-3/4} m^{-1/4} \approx \alpha m^{-1/3},$$

$$J''_m(m) = J'_m(m) - J'_{m+1}(m) \approx \alpha m^{-1/3} - 2^{-1/4} \pi^{-1/2} m^{-3/4} \approx -2^{-1/4} \pi^{-1/2} m^{-3/4} = -\tilde{\alpha} m^{-3/4},$$

$$Y'_m(m) = Y_m(m) - Y_{m+1}(m) \approx \beta m^{-1/3} + \pi^{-1/2} 2^{-1/4} m^{-1/4} \approx \beta m^{-1/3},$$

$$Y''_m(m) = Y'_m(m) - Y'_{m+1}(m) \approx \beta m^{-1/3} - 2^{3/4} \pi^{-1/2} m^{-3/4} \approx -2^{3/4} \pi^{-1/2} m^{-3/4} = -\tilde{\beta} m^{-3/4}.$$

В нашем приближении имеем ДУ:

$$\frac{\alpha - \delta \tilde{\alpha} m^{-5/12} - i \zeta_1 [\alpha(1 + \delta) - (\delta^2 / 2) \tilde{\alpha} m^{-5/12}]}{\beta - \delta \tilde{\beta} m^{-5/12} - i \zeta_1 [\beta(1 + \delta) - (\delta^2 / 2) \tilde{\beta} m^{-5/12}]} = \tan(\pi / 4 - m \gamma^3 / 3). \quad (27)$$

Здесь комплексный индекс $m = kR$ пробегает большие значения, k – искомая постоянная распространения, комплексный параметр $\delta = k_0 R - m$ мал. В первом приближении разложения по отрицательным степеням m ДУ перестает зависеть от δ и имеет действительные решения. В общем случае дисперсионных ветвей бесконечно много, что связано с резонаторным описанием в виде квазиволн. Упрощенное нелинейное ДУ для определения δ имеет вид

$$\tan(\pi / 4 + (\delta - k_0 R) \gamma^3 / 3) \approx \frac{\alpha - \tilde{\alpha} (k_0 R)^{-5/12} \delta - i \zeta_1 \alpha}{\beta - \tilde{\beta} (k_0 R)^{-5/12} \delta - i \zeta_1 \beta}.$$

Дальнейшее упрощение дает: $\tan(\Phi + \delta \delta_1) \approx \alpha / \beta + \delta \delta_0$, $\Phi = \pi / 4 - k_0 R (2h / R)^{3/2}$,

$$\delta_1 = (2h / R)^{3/2} [1 - 3R / (2h)] \ll 1, \quad \delta_0 = (k_0 R)^{-5/12} [(\alpha \tilde{\beta} / \beta^2 - \tilde{\alpha} / \beta) - i \zeta_1 (\alpha \tilde{\beta} / \beta^2 + \tilde{\alpha} / \beta)] \ll 1.$$

Разложение тангенса с линеаризацией по малому параметру позволяет определить приближенное решение

$$\delta = (\tan(\Phi) - \alpha / \beta) / (\delta_0 - \delta_1 / \cos^2(\Phi)).$$

Оно весьма грубое, но уже показывает, что δ имеет положительную мнимую добавку, т.е. волна затухает. На самом деле ДУ (26), (27) в силу периодичности имеют много близких решений (дисперсионных ветвей). В качестве постоянных распространения следует брать $k = k_0 - \delta / R$, для которых $|\delta| \ll 1$, $\text{Re}(\delta) > 0$, $\text{Im}(\delta) > 0$. Решения существуют для дискретного набора близко расположенных частот, что связано с резонаторным подходом.

Реально задачу следует ставить в виде возбуждения резонатора радиальным диполем. Мы не будем приводить соответствующее двумерное цилиндрическое решение задачи Зоммерфельда. Оно упрощается, если наложить импедансные условия на окружностях. Решение задачи в сферических координатах о возбуждении многослойного концентрического

сферического резонатора диполем дано в [88]. Там же приведено характеристическое уравнения для квазисобственных мод.

6. Двумерные плазмоны на бесконечно тонком импедансном слое

Исследование дисперсии плазмонных (поляритонных) ПВ [74–80] в классическом рассмотрении обычно проводят на основе метода частичных областей (сшивания), либо на основе квазистатического рассмотрения [74–76, 106–109]. Эти подходы не позволяют учесть ряд эффектов, связанных с конечной шириной пленки, наличием у нее 2-D-P структуры, шероховатостью или периодичностью ее поверхности, что, например, позволяет делать метод интегральных уравнений (ИУ).

Классический подход на основе ФГ и ИУ электродинамики применен в разделах **6** и **7** для моделирования волн в пленочных (импедансных) плазмон-поляритонных структурах, а в разделе **8** – для волн в гиперболическом метаматериале. Рассмотрены двумерные ПП на бесконечно тонком импедансном слое, поддерживаемые двумерным током, не имеющим поперечной компоненты. Применены метод ФГ и ИУ в классическом подходе к анализу таких плазмон-поляритонных волн в двумерных проводящих пленках. Получены ИУ, ДУ и проведен анализ дисперсии с использованием модели Друде. Проанализированы двумерные проводящие пленки, поперечным размером которых можно пренебречь, и получены поправки для пленок конечной толщины и ширины, строгий анализ которых возможен методами ИУ. Численно исследована дисперсия 2-D ПП двумерной пленки в диэлектрической среде. Получены модели и для толстых пленок, в том числе имеющих конечную ширину, и периодических пленочных структур. Показано, что вытекающие ПВ существуют только в инверсных (активных) структурах, а в диссипативном случае волна сходится к поглощающей пленке, т.е. ПП является втекающей волной. Для рассматриваемых структур приведены новые виды ИУ.

Рассмотрим бесконечный проводящий слой $|z| \leq d/2$ малой толщины d в плоскости $z = 0$, описываемый ДП $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_r - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c)$ и помещенный в однородное пространство со скалярной ДП ε , которую считаем не зависящей от частоты. ДП $\tilde{\varepsilon}$ характерна для плазмы металлов и полупроводников [78]. Здесь ε_r – относительная ДП кристаллической решетки, дисперсией которой мы пренебрегаем. Для многих металлов $\varepsilon_r \sim 10$ и слабо меняется до появления межзонных переходов, начинающихся обычно в оптическом диапазоне. Частота столкновений $\omega_c = \tau^{-1}$, где время релаксации τ связано с длиной свободного пробега l (типичное значение $l \sim 10$ нм при $T \sim 300$ К⁰). Следует брать $d > l$. Плотность тока (ПТ) в тонком однородном слое есть

$$\mathbf{J} = [\mathbf{x}_0 J_x(z) + \mathbf{y}_0 J_y(z)] \exp(-ik_x x - ik_y y). \quad (28)$$

В силу соотношения $d\sqrt{\varepsilon} \ll \lambda$ поперечной компонентой пренебрегаем. Часто вместо ПТ будем писать “ток”. Зависимостью от z можно пренебречь. Для четной волны она имеет приближенный вид: $J_{(x,y)}(z) = J_{0(x,y)} \cosh(i\gamma z) \approx J_{0(x,y)} \cosh(\alpha z)$. Здесь $\gamma = \beta - i\alpha$ – постоянная распространения в плазме металла. Постоянная затухания имеет вид

$$\alpha = k_0 \sqrt{\frac{\sqrt{[\varepsilon_r(\omega^2 + \omega_c^2) - \omega_p^2]^2 + \omega_p^4 \omega_c^2 / \omega^2} - [\varepsilon_r(\omega^2 + \omega_c^2) - \omega_p^2]}{2(\omega^2 + \omega_c^2)}}. \quad (29)$$

Мы предполагаем, что величина βd мала и пренебрегаем изменением фазы в (28) при изменении z . В частности, если $\omega_c \ll \omega \ll \sqrt{\omega_p^2 / \varepsilon_r - \omega_c^2}$, то $\beta \ll \alpha$. Если $\alpha d / 2$ существенно меньше единицы, ток (28) можно считать поверхностным: $J_{(x,y)}(z) = J_{(x,y)}(0) d \delta(z)$. Далее компоненты поверхностной ПТ обозначим $J_{(x,y)}(0) d = J_{0(x,y)} d$. Используя скалярную ФГ в виде соотношения (2.14) из [91], найдем электрический вектор-потенциал $\mathbf{A} = \mathbf{x}_0 A_x + \mathbf{y}_0 A_y$:

$$A_{(x,y)} = \frac{\exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z |z|)}{2ik_z} dJ_{0(x,y)}, \quad (29)$$

а также электрическое поле

$$E_{(x,y)}(x, y, z) = E_{0(x,y)} \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z |z|), \quad (30)$$

$$E_{0(x,y)} = -d \frac{(k_0^2 \varepsilon - k_{(x,y)}^2) J_{0(x,y)} - k_x k_y J_{0(y,x)}}{2\omega \varepsilon_0 \varepsilon k_z}. \quad (31)$$

Здесь $k_z = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2 - k_y^2}$. Нас будут интересовать ПВ, для которых $|\kappa^2| = |k_x^2 + k_y^2| > k_0^2 \varepsilon$. Для того, чтобы получить ДУ, достаточно потребовать выполнение обобщенного закона Ома: $J_{0(x,y)} = \sigma(\omega) E_{0(x,y)}$. Структура без сторонних источников в среде с ДП ε описывается электрическим током поляризации $\mathbf{J}_p(\omega) = i\omega \varepsilon_0 (\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon) \mathbf{E}(\omega)$. Здесь токи проводимости включены в $\tilde{\varepsilon}(\omega)$. С другой стороны, имеем $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon - i\sigma(\omega)/(\varepsilon_0 \omega)$, откуда получаем обобщенную проводимость

$$\sigma(\omega) = i\varepsilon_0 \omega [\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon] = i\varepsilon_0 \omega (\varepsilon_r - \varepsilon) - i\varepsilon_0 \omega^2 / (\omega - i\omega_c). \quad (32)$$

Таким образом, имеем уравнения $J_{0x} = \sigma E_{0x}$, $J_{0y} = \sigma E_{0y}$ или

$$J_{0x} \left[1 + \sigma Z_0 d \frac{k_0^2 \varepsilon - k_x^2}{2k_0 \varepsilon k_z} \right] - J_{0y} \frac{\sigma Z_0 d k_x k_y}{2k_0 \varepsilon k_z} = 0, \quad (33)$$

$$-J_{0x} \frac{\sigma Z_0 d k_x k_y}{2k_0 \varepsilon k_z} + J_{0y} \left[1 + \sigma Z_0 d \frac{k_0^2 \varepsilon - k_y^2}{2k_0 \varepsilon k_z} \right] = 0. \quad (34)$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$. Из (33), (34) следует общее ДУ

$$\left[1 + \sigma Z_0 d \frac{k_0^2 \varepsilon - k_x^2}{2k_0 \varepsilon k_z} \right] \left[1 + \sigma Z_0 d \frac{k_0^2 \varepsilon - k_y^2}{2k_0 \varepsilon k_z} \right] - \frac{(\sigma Z_0 d k_x k_y)^2}{4k_0^2 \varepsilon^2 k_z^2} = 0. \quad (35)$$

Оно описывает поверхностные 2-D поляритонные (ПП) волны. При заданной частоте имеем комплексные решения в виде $k_x(\omega)$ и $k_y(\omega)$. Задавая направление волны вдоль одной из осей, например, положив $k_y = 0$, получим известные ДУ

$$1 + \sigma(\omega) Z_0 d \frac{\sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2}}{2k_0 \varepsilon} = 0, \quad (36)$$

$$1 + \sigma(\omega) Z_0 d \frac{k_0}{2\sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2}} = 0. \quad (37)$$

Приведенные ДУ ранее были получены другими путями (см. [75, 110, 111]). Нетрудно проверить, что магнитное поле имеет требуемый скачок:

$\mathbf{J}d = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)$. Волна, соответствующая ветви (36), не имеет компонент H_x и E_y (ТМ-волна, описываемая формулами (2.41) из [91]), тогда как волна, соответствующая ДУ (10), не имеет компонент H_y и E_x (ТЕ-волна). Соотношения (36), (37) следуют из (29) при учете одной компоненты J_x или J_y . Однако волна, распространяющаяся под углом к оси x , поддерживается двумя компонентами тока и имеет обе касательные компоненты электрического и магнитного полей. Естественно поворот системы координат с осью x вдоль или поперек току переводит ДУ (35) в (36) и (37) соответственно.

В (29), (35), (37) реальная часть квадратного корня для стороннего (возбуждающего) тока должна быть положительная или равна нулю (условие излучения). В диссипативных пленках этому условию уравнения (35) и (36) не удовлетворяют. Выполнение условия излучения возможно только в идеальном случае отсутствия диссипации или для активной пленки. Соотношение (32) представим в форме $\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + j\sigma''(\omega)$, где

$$\sigma'(\omega) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega_c / (\omega^2 + \omega_c^2), \quad \sigma''(\omega) = \varepsilon_0 \omega (\varepsilon_r - \varepsilon) - \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega / (\omega^2 + \omega_c^2). \quad (38)$$

Диссипации соответствует $\omega_c > 0$. Таким образом, волна с ДУ (35) может поддерживаться и иметь вытекающий характер только в активных пленках. Это соответствует тому, что бесконечная плоскость источников может излучать, только если они активные. В частности, быстрая волна тока плоского пучка электронов с соответствующей модуляцией по фазе будет излучать, если ее фазовая скорость $v_p > \omega / (k_0 \sqrt{\varepsilon})$ [91]. Однако нельзя создать бесконечную плоскость (пленку) с активной средой. Активной она может быть лишь в некоторой конечной области. ПП, возбуждаемые сторонними источниками (например, конечным лучом лазера), существуют в силу диссипации в конечной области, а при их распространении энергия пленкой поглощается. Волна в указанной области является неоднородной квазиплоской и втекающей в пленку. Поэтому для уравнения (35) мы будем

использовать ветвь корня с отрицательной реальной частью. При этом поверхностный характер волна (35) носит, если $\sigma'' < 0$. В зависимости от соотношений между частотами ω , ω_p и ω_c , а также ДП ε_r и ε могут быть разные приближенные решения ДУ. При низких частотах $\omega \ll \omega_c$ имеем $\sigma'(\omega) \approx \varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega_c = \sigma_0$, $\sigma''(\omega) \approx \omega[\varepsilon_0(\varepsilon_r - \varepsilon) - \sigma_0 / \omega_c]$. Величина σ'' отрицательная, если $\varepsilon_r < \varepsilon + \sigma_0 / (\varepsilon_0 \omega_c)$. Если $\varepsilon_r \leq \varepsilon$, то σ'' отрицательна всегда. При $\varepsilon_r > \varepsilon$ отрицательной σ'' может быть, только если $\omega_c < \omega_0 = \omega_p / \sqrt{\varepsilon_r - \varepsilon}$. Пусть это выполнено. Тогда с ростом частоты σ' уменьшается, величина $-\sigma''$ сначала растет, достигает максимума и начинает убывать. На частоте $\omega_s = \sqrt{\omega_p^2 / (\varepsilon_r - \varepsilon) - \omega_c^2}$ она обращается в нуль. Для больших частот $\omega \gg \omega_c$ получаем $\sigma'(\omega) = \sigma_0 \omega_c^2 / \omega^2 \ll \sigma_0$, $\sigma''(\omega) = \varepsilon_0 \omega (\varepsilon_r - \varepsilon) - \varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega$. При выполнении условия $|\sigma(\omega)| Z_0 d \gg 2k_0 \varepsilon$ из (36) следует, что волна чуть медленнее скорости света в среде. Это выполнено на малых частотах, а также при $\omega_c \ll \omega \ll \omega_s$. В последнем случае мнимая часть проводимости большая отрицательная: $|\sigma''(\omega)| = |\varepsilon_0 \omega_p^2 / \omega| \gg \sigma'(\omega)$, при этом $k_x^2 \approx k_0^2 \varepsilon + (2k_0^2 \varepsilon)^2 / k_p^4 d^2$. В этом соотношении $k_p^2 d = n_s d e^2 / (m c^2 \varepsilon_0) = n_s d \mu_0 e^2 / m$, где $n_s = n_e d$ характеризует поверхностную концентрацию зарядов. Второй член здесь мал, т.е. волна идет чуть медленнее скорости света в среде (медленная ПВЦ). Для быстрой и медленной ПВЦ их структура поля поверхностная и втекающая. Для очень медленной ПВ модуль $Z_0 \sigma d$ должен быть мал. Это при условии $\varepsilon_r > \varepsilon$ возможно, когда частота ниже ω_s , а величины $Z_0 \sigma' d$ и $Z_0 \sigma'' d$ малы (невелики). ДУ (36) в силу сделанных замечаний запишем в форме

$$\sqrt{k_x^2 - k_0^2 \varepsilon} = \frac{2k_0 \varepsilon}{i\sigma(\omega) Z_0 d} = (\alpha(\omega) - i\beta(\omega)), \quad (39)$$

где величины α и β положительные. Соответствующая волна втекает в металлическую пленку и распространяется с затуханием. Она тем более локализована, чем больше α . На границе диапазона $\alpha(\omega_s) = 0$, и в случае

больших потерь быстрая ПВЦ на этой частоте имеет вид плоской волны, скользящей вдоль пленки без затухания под углом $\theta = \arctan(k_z(\omega_s)/k_x(\omega_s))$, т.е. падающей под углом Брюстера $\varphi = \pi/2 - \theta$, как и для полуплоскости. При этом $k_x(\omega_s) = k_0 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - 4\varepsilon/(\sigma'(\omega_s)Z_0d)^2}$, $k_z(\omega_s) = \beta(\omega_s)$. Здесь под большими потерями мы подразумеваем, что $\sigma'(\omega_s)Z_0d > 2\sqrt{\varepsilon}$ или $\omega_c > \omega_{c0}$, где $\omega_{c0} = 2\sqrt{\varepsilon}/[Z_0d\varepsilon_0(\varepsilon_r - \varepsilon)]$. Компоненты $k'_x = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)/2}$ и $k''_x = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)/2}$ в этом случае определены через положительные величины

$$\alpha = -\frac{2k_0\varepsilon\sigma''}{(\sigma'^2 + \sigma''^2)Z_0d}, \quad \beta = \frac{2k_0\varepsilon\sigma'}{(\sigma'^2 + \sigma''^2)Z_0d},$$

$$a = k_x'^2 - k_x''^2 = k_0^2\varepsilon + \alpha^2 - \beta^2, \quad b = 2k'_x k''_x = 2\alpha\beta.$$

На малых частотах α и β малы. С ростом частоты α растет, достигает максимума, затем убывает и достигает нуля на частоте ω_s , а β убывает, затем растет, а на частотах выше, чем ω_s опять убывает. При этом $\alpha/\beta = -\sigma''/\sigma'$. Если вблизи граничной частоты выполняется $\alpha \gg \beta$, то $a \gg b$. В этом случае $k'_x = \sqrt{a} > k_0\sqrt{\varepsilon}$ и волна медленная. Волна становится быстрой, когда $\alpha < \beta$, при значении $\alpha(\omega_f) = \beta(\omega_f) \sqrt{\omega_f^2\varepsilon/(c^2\beta^2(\omega_f) + \omega_f^2\varepsilon)}$. В случае малых потерь $\omega_c < \omega_{c0}$ величина a меняет знак. Пусть на частоте ω_a имеет место равенство $a = 0$, что соответствует $k'_x = k''_x = \sqrt{\alpha\beta}$. Если при этом $\alpha \ll \beta$ (что выполнено при $-\sigma'' \ll \sigma'$), то $\sigma'(\omega_a)Z_0d \approx 2\sqrt{\varepsilon}$. Тогда $k'_x = k''_x = \sqrt{b/2}$, $k'_x \sim k_0\sqrt{-\varepsilon\sigma''/\sigma'}$, и на частоте ω_a волна быстрая. В области $\omega_a < \omega < \omega_s$, когда $a < 0$, реализуется случай больших затуханий $k'_x < k''_x$, потери маленькие, а на самой граничной частоте волновое число $k_x(\omega_s)$ мнимое, и распространения нет. Если $\omega_c = \omega_{c0}$ то $\omega_a = \omega_s$. Выше частоты ω_s волна нелокализованная и возбуждена быть не может. При больших потерях на быстрой ветви ДУ k'_x нуля не достигает. На медленной ветви при малых потерях ГС мала и уменьшается с ростом частоты, затем быстро нарастает и проходит через бесконечность. Максимальное волновое число определяется из условия $v_g(\omega_m) = \infty$ или

$dk'_z/d\omega=0$, где ω_m – наименьший корень этого уравнения. Затем дисперсия становится аномальной отрицательной, а при $\omega > \omega_f$ волна является быстрой и на граничной частоте замедление почти достигает нуля. Затем замедление резко достигает второго максимума на ветви с нормальной дисперсией, затем убывает на ветви с аномальной отрицательной дисперсией, проходит через минимум и начинает расти (рис. 9). Случаю $v_g=0$ соответствует $k'_x=0$, что достигается на граничной частоте при $\omega_c \leq \omega_{c0}$. В случае очень малых потерь всегда $\omega_m \approx \omega_s$ и $\omega_m < \omega_s$. До частоты ω_m дисперсия нормальная, а в узкой области $\omega_m < \omega < \omega_a$ – аномальная, при этом максимальное волновое число $k'_x(\omega_m)$ велико, а область локализации $L=(2a)^{-1}$ на этой частоте мала. Строгие соотношения для $k'_x(\omega_m)$ и ω_m весьма громоздки, поэтому не приведены. При малых потерях замедление резко меняется от максимального до почти нулевого (рис. 10). На графике дисперсии образуется длинный “клюв”. При больших потерях максимальное замедление невелико, область клюва мала, а $k'_x(\omega_s)$ чуть меньше $k_0\sqrt{\varepsilon}$.

Пренебрегая в (13) первым членом под корнем (требуя выполнения условия $|k_z| \gg k_0\sqrt{\varepsilon}$) и полагая $\sigma = -i\varepsilon_0\omega_p^2/\omega$ (т.е. $\varepsilon_r = \varepsilon$, $\omega_c = 0$), мы получаем известное ДУ для 2-D медленных ПП в электростатическом приближении [75, 78, 108] $k_x = 2k_0^2\varepsilon/(k_p^2d)$ или в форме $\omega = \sqrt{\omega_p^2 k_x d / (2\varepsilon)}$. В пределе $\omega \rightarrow \omega_s$ волновое число k'_x стремится либо к \sqrt{a} , либо к нулю в зависимости от знака a (при этом k''_x стремится либо к нулю, либо к \sqrt{a}). На частоте ω_s волна теряет поверхностный характер. Хорошая поперечная локализация достигается уже при не слишком больших замедлениях. При этом $v_p \sim k_x'^{-1/2}$, а в области больших замедлений $v_p \sim k_x'^{-1}$. Наконец, при $\varepsilon_r \leq \varepsilon$ волна поверхностная всегда. Максимальная локализация достигается на частоте максимального значения α , которой примерно соответствует и

максимальное замедление. При $\varepsilon_r = \varepsilon$ величина α пропорциональна ω^2 , указанного максимума нет ($\omega_m = \infty$), а дисперсия имеет вид

$$k_x^2 = k_0^2 \varepsilon + \frac{4k_0^2 \varepsilon^2}{(Z_0 d \varepsilon_0 \omega_p^2)^2} [\omega^2 - \omega_c^2 - 2i\omega\omega_c].$$

Значение частоты ω_m зависит от соотношений между ω_p и ω_c . Для $\omega_c < \omega_p / \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_r}$ она лежит в окрестности частоты $\omega_p / \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_r}$, при этом дисперсия до максимума нормальная, а после аномальная положительная. Замедление $n \geq \sqrt{\varepsilon}$, причем равенство достигается на нулевой и бесконечной частотах. Максимальное замедление растет при уменьшении $\varepsilon - \varepsilon_r$. Максимальные потери соответствуют максимальному замедлению. Для $\omega_c > \omega_p / \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_r}$ картина становится иной: на низких частотах замедление резко меняется от нуля до максимума, который смещен в низкочастотную область, может быть большим и растет с ростом ω_c . После максимума дисперсия аномальная положительная, а замедление резко спадает до $\sqrt{\varepsilon}$ (рис. 12).

Из ДУ (10) при сделанных замечаниях следует, что поверхностный характер втекающая волна имеет, если $\sigma'' > 0$, т.е. должно быть $\varepsilon_r > \varepsilon$, $\omega > \omega_s$. Очень медленной волна будет, если модуль проводимости большой. При этом $\sigma''(\omega) \approx \varepsilon_0 \omega (\varepsilon_r - \varepsilon) \gg \sigma' \approx \sigma_0 \omega_c^2 / \omega^2$. Соответствующая волна носит поляритонный характер, связанный с токами смещения. Для численных результатов (рис. 9 – 12) были взяты следующие параметры: $d = 30$ нм, $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{16}$ Гц, $\varepsilon_r = 8-11$, ω_c варьировалась в пределах $10^{12} - 4 \cdot 10^{16}$ Гц. Рис. 9 иллюстрирует ход дисперсионных ветвей при вариации потерь в районе больших значений ω_c . Сильно замедленный ПП (пологий загиб кривой) проявляется при d менее 100–150 нм, причем его частота практически не зависит от d , а максимальное замедление с уменьшением d увеличивается. Рис. 10 и 11 построены для $\varepsilon_r = 10$, при этом частотная область для каждой кривой бралась в диапазоне $1.5 \cdot \omega_s$. Крутые части кривых ниже ω_s

соответствуют распространению почти незамедленным волнам с $v_p \approx c/\sqrt{\varepsilon}$. В начале пологой части кривых $v_p \approx \sqrt{\omega_p^2 d / (2\varepsilon k_x)}$. Далее с ростом замедления оно практически перестает зависеть от частоты ($v_p \approx \omega_s / k_x$), потом резко спадает до нуля, и осуществляется переход на нелокализованную моду. Увеличение частоты столкновений приводит к исчезновению сильно замедленной плазменной ветки. Потери малы и сильно возрастают на частотах ω_s . Весьма высокие замедления связаны с малыми ω_c порядка $10^{12} - 10^{14}$ Гц. На рис. 12 приведены замедления для случая $\varepsilon_r = 1$ (2-D канал газообразной плазмы в диэлектрике) и $\varepsilon_r < \varepsilon$.

7. Функции Грина, интегральные уравнения и плазмоны в многослойных и периодических структурах

Универсальными методами описания плазмонов (поверхностных и объемных) является методы ИУ. Объемное ИУ следует из факта возбуждения электрического поля \mathbf{E} ПТ поляризации $\mathbf{J}_p = i\omega(\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon)\mathbf{E}$, пропорциональной полю. Оно удобно для описания как объемных, так и ПП. Для первых обычно $\varepsilon = 1$. Если \mathbf{J}_p имеет поверхностный характер, возникает поверхностное ИУ. Его также можно получить, налагая импедансные условия на поверхностях, или задавая закон убывания \mathbf{J}_p при удалении от поверхности вдоль нормальной координаты. В этом случае можно уточнить ДУ для бесконечной границы раздела. Так, уточнение ДУ (36) возможно на основе распределения ПТ по гиперболическому косинусу. Направим ось x по направлению тока. Тогда имеем только одну компоненту вектор-потенциала (условие $k_y = 0$):

$$A_x(x, z) = J_{0x} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\exp(-ik_x x - i\sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2} |z - z'|)}{2i\sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2}} \cosh(\alpha z') dz', \quad (40)$$

Вычисляя интеграл (40), имеем

$$A_x(x, z) = \frac{J_{0x} \exp(-ik_x x)}{ik_z} \left\{ \frac{\exp(-2ik_z z) \sinh(\alpha z)}{\alpha} + \right.$$

$$+ \frac{\exp(-ik_z d)(\alpha \sinh(\alpha d/2) + 2ik_z \cosh(\alpha d/2))}{\alpha^2 + 4k_z^2} -$$

$$- \frac{\exp(-2ik_z z)(\alpha \sinh(\alpha z) + 2ik_z \cosh(\alpha z))}{\alpha^2 + 4k_z^2} \Bigg\}.$$

Определяя $E_x(x, z) = (i\omega\epsilon_0\epsilon)^{-1}(k_0^2\epsilon - k_x^2)A_x(x, z)$, и обозначая $E_x(x, z) = \exp(-ik_x x)E_x(z)$, имеем приближенное ДУ: $J_{0x} \cosh(\alpha z) \approx \sigma E_x(z)$. Строгий подход требует решения ИУ. Налагая данное условие при $z = 0$. Получим

$$1 = -\sigma(k_0^2\epsilon - k_x^2) \frac{\exp(-ik_z d)(\alpha \sinh(\alpha d/2) + 2ik_z \cosh(\alpha d/2)) - 2ik_z}{2\omega\epsilon_0\epsilon k_z(\alpha^2 + 4k_z^2)}.$$

При малых d в первом порядке имеем ДУ (36). Соответствующие касательные компоненты поля имеют вид

$$E_x = -\frac{k_z d J_{0x}}{2\omega\epsilon_0\epsilon} \exp(-ik_x x - ik_z |z|), \quad H_y = -\operatorname{sgn}(z) \frac{\exp(-ik_x x - ik_z |z|)}{2} dJ_{0x}. \quad (41)$$

Строго учесть толщину слоя можно, используя точные ДУ (см., например, [83–85]). Для симметричной структуры их четыре в зависимости от четности-нечетности. ДУ получены для многослойных металлодиэлектрических (полупроводниковых) структур.

Рассмотрим приближенный учет конечной ширины для ДУ (36). Пусть тонкий металлический слой занимает область $|y| \leq w/2$. Конечность толщины не учитываем. Для идеально проводящей полосковой линии необходимы две компоненты поверхностного тока, чтобы образовать моду. Эти две компоненты тока в конечной области могут быть как четными, так и нечетными относительно y , что определяет четыре типа мод. При адмитансном соотношении $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ компоненты поля и тока должны иметь одинаковую симметрию. Из четырех случаев симметрии следует рассмотреть два, в которых компоненты тока имеют разную четность. В первом случае

$$J_x(x, y, z) = dJ_{0x} \delta(z) \exp(-ik_x x) \cos(k_{ym} y), \quad J_y(x, y, z) = dJ_{0y} \delta(z) \exp(-ik_x x) \sin(k_{ym} y). \quad (42)$$

Во втором случае

$$J_x(x, y, z) = dJ_{0x} \delta(z) \exp(-ik_x x) \sin(\tilde{k}_{ym} y), \quad J_y(x, y, z) = dJ_{0y} \delta(z) \exp(-ik_x x) \cos(\tilde{k}_{ym} y). \quad (43)$$

Здесь $k_{ym} = 2n\pi/w$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\tilde{k}_{ym} = (2m-1)\pi/w$, $m = 1, 2, \dots$. Налагать условия на ребре не следует, т.к. идеальной проводимости нет. Но $J_y(x, \pm w/2, z) = 0$, поскольку заряд на кромке не накапливается. В общем случае следует представлять ПТ в виде разложений по функциям типа (42), (43), что приводит к поверхностным ИУ. Компоненты вектор-потенциала имеют вид

$$A_x = \frac{dJ_{0x}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_x x - ik_z |z|) \cos(k'_y y)}{ik_z} \left[\frac{\sin((k'_y + k_{ym})w/2)}{k'_y + k_{ym}} + \frac{\sin((k'_y - k_{ym})w/2)}{k'_y - k_{ym}} \right] dk'_y, \quad (44)$$

$$A_y = \frac{dJ_{0y}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_x x - ik_z |z|) \sin(k'_y y)}{ik_z} \left[\frac{\sin((k'_y - k_{ym})w/2)}{k'_y - k_{ym}} - \frac{\sin((k'_y + k_{ym})w/2)}{k'_y + k_{ym}} \right] dk'_y. \quad (45)$$

Четные компоненты ПТ приводят к четным компонентам потенциала, а нечетные – к нечетным. В силу четности по k'_y интегралы можно записать в пределах $(0, \infty)$. Вычисляя интегралы асимптотически, получим

$$A_x \approx dJ_{0x} \frac{\exp(-ik_x x - ik_z |z|) \cos(k_{ym} y)}{2ik_z}, \quad A_y \approx dJ_{0y} \frac{\exp(-ik_x x - ik_z |z|) \sin(k_{ym} y)}{2ik_z}, \quad (46)$$

где $k_z = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2 - k_{ym}^2}$. Соотношения (46) приводят к ДУ типа (35) с $k_y = k_{ym}$, а (43) – с $k_y = \tilde{k}_{ym}$, но поля и токи имеют другую четность. Эти приближенные ДУ описывают бесконечное число мод. Строгий подход требует решения ИУ.

В случае направляющей структуры с зависимостью $\exp(-ik_x x)$ трехмерные объемные ИУ сводятся к двумерной области поперечного сечения S металлической пленки $|y| < w/2$, $|z| < d/2$ [85]. Имеем следующее основное ИУ

$$\mathbf{E}(y, z) = (\tilde{\varepsilon}(\omega)/\varepsilon - 1) \int_S \hat{\Gamma}(y - y', z - z') \mathbf{E}(y', z') dy' dz'. \quad (47)$$

Здесь тензорная ФГ записывается как

$$\hat{\Gamma}(y - y', z - z') = \begin{bmatrix} k_0^2 \varepsilon - k_x^2 & -ik_x \partial / \partial y & -ik_x \partial / \partial z \\ -ik_x \partial / \partial y & k_0^2 \varepsilon + \partial^2 / \partial y^2 & \partial^2 / \partial y \partial z \\ -ik_x \partial / \partial z & \partial^2 / \partial y \partial z & k_0^2 \varepsilon + \partial^2 / \partial z^2 \end{bmatrix} G(y - y', z - z').$$

В него входит выражающаяся через функцию Ганкеля двумерная скалярная ФГ G [91]. Поскольку $d \ll w$, внутри слоя можно пренебречь компонентой E_z . Обозначив $\mathbf{E}_{\parallel} = (E_x, E_y)$, получим двумерное ИУ

$$\mathbf{E}_{\parallel}(y, z) = (\tilde{\varepsilon}(\omega) / \varepsilon - 1) \int_S \hat{\Gamma}_{\parallel}(y - y', z - z') \mathbf{E}_{\parallel}(y', z') dy' dz', \quad (48)$$

$$\hat{\Gamma}_{\parallel}(y - y', z - z') = \begin{bmatrix} k_0^2 \varepsilon - k_x^2 & -ik_x \partial / \partial y \\ -ik_x \partial / \partial y & k_0^2 \varepsilon + \partial^2 / \partial y^2 \end{bmatrix} G(y - y', z - z').$$

Из ИУ (48) можно получить путем различных преобразований ряд в общем случае интегродифференциальных уравнений. Для снижения сингулярности мы проинтегрируем (48) по z в пределах $(0, z)$:

$$c_1 + \int_0^z E_x(y, z') dz' = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon} - 1 \right) \int_S \left[(k_0^2 \varepsilon - k_x^2) E_x(y', z') - jk_x E_y(y', z') \partial / \partial y \right] \bar{G}(y - y', z - z') dy' dz', \quad (49)$$

$$c_2 + \int_0^z E_y(y, z') dz' = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon} - 1 \right) \int_S \left[-jk_x E_x(y', z') \partial / \partial y + E_y(y', z') (k_0^2 \varepsilon + \partial^2 / \partial y^2) \right] \bar{G}(y - y', z - z') dy' dz'. \quad (50)$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные константы и введено ядро

$$\bar{G}(y - y', z, z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_y(y - y') + ik_z z') [\exp(-ik_z z) - 1]}{-ik_z [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon]} dk_y dk_z.$$

ИУ определяет бесконечное число мод. Решение требует разложения поля \mathbf{E}_{\parallel} по базисным функциям в прямоугольной области. Сведем (49), (50) к одномерным ИУ по координате y . Будем искать четные и нечетные относительно z решения, воспользовавшись тем, что d мало. Соответственно поле представим в виде $E_x(y, z) = E_x(y) \cos(\gamma z)$, $E_z(y, z) = E_z(y) \cos(\gamma z)$ и $E_x(y, z) = E_x(y) \sin(\gamma z)$, $E_z(y, z) = E_z(y) \sin(\gamma z)$. Здесь $\gamma = \beta - i\alpha$ – комплексная постоянная распространения в металле. Подстановки не приводят к одинаковым зависимостям левых и правых частей ИУ от z . Поэтому для четного случая мы усредним ИУ с весовым множителем z по этой координате в области $-d/2 < z < d/2$, что позволит избавиться от констант. Для нечетного случая мы положим константы нулю (что соответствует нулевым значениям первообразных компонент полей в центре) и усредним с единичным весом. В результате для обоих случаев следует решать ИУ

$$f^{\pm}(\gamma, d)E_x(y) = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon} - 1 \right) \int_S \left[(k_0^2 \varepsilon - k_x^2) E_x(y') - ik_x E_y(y') \partial / \partial y \right] G^{\pm}(y - y') dy', \quad (51)$$

$$f^{\pm}(\gamma, d)E_y(y) = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon} - 1 \right) \int_S \left[-jk_x E_x(y') \partial / \partial y + E_y(y') (k_0^2 \varepsilon + \partial^2 / \partial y^2) \right] G^{\pm}(y - y') dy', \quad (52)$$

где обозначено

$$f^+(\gamma, d) = \frac{2 \sin(\gamma d / 2)}{\gamma^3 d^2} - \frac{\cos(\gamma d / 2)}{\gamma^2 d}, \quad (53)$$

$$f^-(\gamma, d) = \frac{1}{\gamma} - \frac{2 \sin(\gamma d / 2)}{\gamma^2 d}, \quad (54)$$

$$w^{\pm}(k_z, \gamma) = \frac{\sin((k_z - \gamma)d / 2)}{k_z - \gamma} \pm \frac{\sin((k_z + \gamma)d / 2)}{k_z + \gamma}, \quad (55)$$

$$G^{\pm}(y - y') = \frac{-j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-j\sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2 - k_z^2} |y - y'|\right) w^{\pm}(k_z, \gamma) f^{\pm}(k_z, d)}{\sqrt{k_0^2 \varepsilon - k_x^2 - k_z^2}} dk_z. \quad (56)$$

Входящие в интегралы функции (45), (55) не имеют полюсов и при больших k_z сильно убывают, т.е. являются обрезаящими факторами при численном вычислении интегралов (56). Из ИУ (51), (52) определяются постоянные распространения k_x четных и нечетных мод, а также распределения полей и ПТ в области слоя и во всем пространстве. Подынтегральные выражения в ядрах (56) при больших $|k_z|$ имеют осциллирующий характер и убывают быстрее, чем $|k_z|^{-s} \exp(-|k_z||y - y'|)$, где $s = 4$ для четных мод $s = 3$ для нечетных мод. Получаемые одинарным и двойным дифференцированием тензорные ядра имеют соответственно значения s , меньшие на 1 и 2. Матричные элементы, получаемые интегрированием, сходятся еще быстрее. Мы рассмотрели частный случай объемного ИУ, которое свели к одномерному. Существует большое многообразие объемных интегральных и интегродифференциальных уравнений (см., например [98]), в том числе и нагруженных поверхностными интегралами, которые можно применить к направляющим ПП структурам, и к локализованным плазмонам.

Большой интерес представляет исследование ПП в тонких металлических пленках, расположенных в многослойных диэлектрических

структурах, а также в 2-D-P структурах. Это требует построения соответствующих тензорных ФГ и поверхностных ИУ. Решение задачи получается традиционными методами частичных областей и сшивания полей, применяемым в теории планарных полосковых структур. В отличие от плазмоники, их обычно рассматривают как идеально проводящие. Вводятся магнитные и электрические потенциалы Герца, нормальные к границам раздела сред (хотя можно использовать и другие их ориентации), и используется двумерное пространственное преобразование Фурье. Металлизация может быть на разных границах раздела. Сначала рассмотрим структуру из слоя толщины h , на обеих границах которого заданы поверхностные токи (расположены металлические пленки). Слой имеет действительные проницаемости ε и μ . Его нижняя граница $z=0$ лежит на полупространстве ε_1, μ_1 ($z<0$), а верхняя граница ($z=h$) контактирует с полупространством ε_2, μ_2 . В областях введем z -компоненты электрического Φ и магнитного Ψ потенциалов Герца. Все величины преобразуем по x и y с параметрами α и β соответственно и будем работать с трансформантами Фурье, которые обозначаем так же, как и координатные величины. Все зависимости от α и β будем для удобства опускать. Окончательные ИУ получаются обратным преобразованием Фурье. Однако вместо ИУ можно решать функциональные уравнения в Фурье-пространстве. В областях введем продольное волновое число $k_m = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_l \mu_l - \alpha^2 - \beta^2}$ (индекс z опущен), $l=1,2$. Для пластины индекс m отсутствует. В областях учитываем условие излучения (волны, уходящие в бесконечность: $\exp(ik_1 z)$ в области 1 и $\exp(-ik_1(z-h))$ – в области 2). В области пластины рассматриваем волны обоих направлений. Тогда имеем в области 1:

$$\begin{aligned} E_{1x} &= \alpha k_1 \Phi_1 - \omega \mu_0 \mu_1 \beta \Psi_1, & E_{1y} &= \beta k_1 \Phi_1 + \omega \mu_0 \mu_1 \alpha \Psi_1, \\ H_{1x} &= \alpha k_1 \Psi_1 + \omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \beta \Phi_1, & H_{1y} &= \beta k_1 \Psi_1 - \omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \alpha \Phi_1. \end{aligned}$$

В пластине:

$$\begin{aligned}
E_x &= \alpha k [\Phi_- \exp(ikz) - \Phi_+ \exp(-ikz)] - \omega \mu_0 \mu \beta [\Psi_+ \exp(-ikz) + \Psi_- \exp(ikz)], \\
E_y &= \beta k [\Phi_- \exp(ikz) - \Phi_+ \exp(-ikz)] + \omega \mu_0 \mu \alpha [\Psi_+ \exp(-ikz) + \Psi_- \exp(ikz)], \\
H_x &= \alpha k [\Psi_- \exp(ikz) - \Psi_+ \exp(-ikz)] + \omega \varepsilon_0 \varepsilon \beta [\Phi_+ \exp(-ikz) + \Phi_- \exp(ikz)], \\
H_y &= \beta k [\Psi_- \exp(ikz) - \Psi_+ \exp(-ikz)] - \omega \varepsilon_0 \varepsilon \alpha [\Phi_+ \exp(-ikz) + \Phi_- \exp(ikz)].
\end{aligned}$$

В области 2:

$$\begin{aligned}
E_{2x} &= -\alpha k_2 \Phi_2 - \omega \mu_0 \mu_2 \beta \Psi_2, & E_{2y} &= -\beta k_2 \Phi_2 + \omega \mu_0 \mu_2 \alpha \Psi_2, \\
H_{2x} &= -\alpha k_2 \Psi_2 + \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \beta \Phi_2, & H_{2y} &= -\beta k_2 \Psi_2 - \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \alpha \Phi_2.
\end{aligned}$$

Из непрерывности электрических компонент и требований заданных скачков трансформант касательных магнитных полей на границах раздела, связанных с трансформантами компонент поверхностной ПТ

$$H_{2x} - H_x = J_{2y}, \quad H_{2y} - H_y = -J_{2x}, \quad H_x - H_{1x} = J_{1y}, \quad H_y - H_{1y} = -J_{1x},$$

получаются следующие импедансные соотношения

$$E_{lx} = g_{xx}'' J_{lx} + g_{xy}'' J_{ly}, \quad E_{ly} = g_{yx}'' J_{lx} + g_{yy}'' J_{ly}. \quad (57)$$

Здесь по штрихованным индексам подразумевается суммирование. Пространственная тензорная ФГ поверхностных источников получается обратным преобразованием Фурье от (57). Для того чтобы уяснить алгоритм построения тензорных функций в (57), приведем их вид при отсутствии слоя. В этом случае имеем только поверхностные ПТ на границе, а индексы l, l' опускаем и обозначаем $(E_{1(x,y)} = E_{2(x,y)} = E_{(x,y)})$. Вводя электрические $z_l^e = k_i / (\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i)$ и магнитные $z_l^m = \omega \mu_0 \mu_i / k_i$ импедансы мод поперечного направления, получим

$$E_x = \frac{-1}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \left[\alpha^2 \frac{z_1^e z_2^e}{z_1^e + z_2^e} + \beta^2 \frac{z_1^m z_2^m}{z_1^m + z_2^m} \right] J_x + \alpha \beta \left[\frac{z_1^e z_2^e}{z_1^e + z_2^e} - \frac{z_1^m z_2^m}{z_1^m + z_2^m} \right] J_y \right\}. \quad (58)$$

$$E_y = \frac{-1}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \alpha \beta \left[\frac{z_1^e z_2^e}{z_1^e + z_2^e} - \frac{z_1^m z_2^m}{z_1^m + z_2^m} \right] J_x + \left[\beta^2 \frac{z_1^e z_2^e}{z_1^e + z_2^e} + \alpha^2 \frac{z_1^m z_2^m}{z_1^m + z_2^m} \right] J_y \right\}. \quad (59)$$

Здесь $g_{xy} = g_{yx}$, а дроби соответствуют параллельному подключению импедансов полупространств к плоскости поверхностного тока. Это правило является общим для любой многослойной структуры: связи имеют вид (58),

(59) с суммированием по вкладам от всех токов. В каждом члене при $J_{l'(x,y)}$ импедансы следует понимать как трансформированные их значения по формуле трансформации импедансов снизу и сверху к плоскости тока. Например, в нашем случае в квадратных скобках при $J_{1(x,y)}$ импедансы $z_1^{(e,m)}$ не изменяются, тогда как для импедансов с индексом 2 следует взять значения

$$\tilde{z}_2^{(e,m)} = z_2^{(e,m)} \frac{z_2^{(e,m)} + jz_2^{(e,m)} \tan(kh)}{z_2^{(e,m)} + jz_2^{(e,m)} \tan(kh)}.$$

Для бесконечных металлизаций удобно строить ДУ многослойных структур методом матриц передачи.

Рассмотрим теперь применение ФГ для одномерно-периодических (1-D-P), 2-D-P и трехмерно-периодических (3-D-P) структур. Для медленных поверхностных волн 2-D-P структуры являются замедляющими. В них также существуют быстрые вытекающие волны. Дисперсия имеет зонную структуру. Диссипация приводит к разрушению зон непропускания (bandgap) [98]. Используем скалярную ФГ периодических и сфазированных источников, расположенных в плоскости $z=0$ в среде с ДП ε (построение ФГ для многослойных периодических структур ничем не отличается от приведенного выше с заменой интегральных преобразований Фурье на ряды Фурье). Вид 1-D-P, 2-D-P и 3-D-P ФГ приведен в [98]. Для часто используемых 2-D-P структур он такой:

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_{xm}x - ik_{yn}y - ik_z z)}{k_{xm}^2 + k_{yn}^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon} dk_z. \quad (60)$$

Здесь обозначено $k_{xm} = k_x + 2m\pi/a$, $k_{yn} = k_y + 2n\pi/b$, a и b – периоды по осям x и y соответственно. Пусть в плоскости z периодически расположены тонкие металлические полосы ширины w , бесконечные вдоль оси y . Для простоты считаем $w \ll a$ и пренебрежем поперечной компонентой тока J_x . Поместим начало координат в центр полосы и зададим ток на ней в виде $\mathbf{J} = \mathbf{y}_0 J_0 d \exp(-ik_{y,y}) \delta(z)$, $|x| < w/2$. Вне полосы при $|x| < a/2$ он равен нулю.

Использование 1-D-P ФГ позволяет рассмотреть только одну полосу и рассматривать поля только в одной ячейке периодичности. В данном случае нам потребуется только одна компонента электрического поля при $z = 0$:

$$E_y = -\frac{J_{0y}d(k_0^2\varepsilon - k_y^2)}{\omega\varepsilon_0\varepsilon a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}w/2)}{k_{xm}k_{zm}} \exp(-ik_{xm} - ik_y y - ik_{zm}|z|).$$

Здесь $k_{zmm} = \sqrt{k_0^2\varepsilon - k_{xm}^2 - k_y^2}$. Полагая $J_{0y} = \sigma E_y$ при $z = 0$, найдем ДУ

$$1 + \frac{\sigma(\omega)Z_0d(k_0^2\varepsilon - k_y^2)}{k_0\varepsilon a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}w/2)\exp(-ik_{xm})}{k_{xm}k_{zm}} = 0. \quad (61)$$

Если $k_x \approx 0$ (волна вдоль оси x очень быстрая) в (61) можно оставить только нулевой член, и тогда $1 + \sigma(\omega)Z_0d\sqrt{k_0^2\varepsilon - k_y^2}w/(2k_0\varepsilon a) = 0$. Это ДУ аналогично (36): при малых потерях и малой по величине и отрицательной σ'' оно определяет медленные ПП вдоль оси y . Уточним ДУ (61), взяв

$$\mathbf{J} = [\mathbf{x}_0 J_{0x} \cos(\pi x/w) + \mathbf{y}_0 J_{0y}]d \exp(-jk_y y) \delta(z), \quad |x| < w/2. \quad (62)$$

Вектор-потенциал для ПТ (63) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \frac{\mathbf{x}_0 d J_{0x}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{w^{\pm}(k_{xm}, \pi/w) \exp(-ik_{xm}x - ik_y y - ik_{zm}|z|)}{2ik_{zm}} + \\ & + \frac{\mathbf{y}_0 d J_{0y}}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}w/2) \exp(-ik_{xm}x - ik_y y - ik_{zm}|z|)}{ik_{xm}k_{zm}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Поскольку $\mathbf{E} = (i\omega\varepsilon_0\varepsilon)[\mathbf{grad}(\text{div}) + k_0^2\varepsilon]\mathbf{A}$, то импедансные условия приводят к ДУ типа (35). Отличие состоит в том, что в него входят ряды типа (63). ФГ (60) удобна для анализа ПП в 2-D-P решетке, например, из перпендикулярных металлических лент или конечных металлизаций на подложке.

8. Втекающая волна в гиперболическом метаматериале

На рис. 13 приведен пример вычисления пространственной дисперсии для 2-D-P структуры из тонких бесконечных цилиндров с комплексной ДП. Цилиндры в виде тонких металлических проволок на относительно низких частотах образуют гиперболический метаматериал, в запрещенной зоне которого компонента ε_{zz} тензора эффективной ДП $\hat{\varepsilon}$ является отрицательной

[87, 112–116]. При этом волна вдоль оси такого ФК будет быстрой. Возможны и медленные плазмонные волны, для которых также $\varepsilon_{zz} < 0$. Подобные метаматериалы в виде нанопроволочек в диэлектрической основе могут почти полностью поглощать излучение (отрицательный вклад в эффективную ДП от металлических включений компенсирует ДП основы так, что $\hat{\varepsilon} \approx 1$), передавать излучение от микроволнового до инфракрасного диапазонов практически без потерь и со скоростью света, а также фокусировать (передавать) изображение в терагерцовой области [113–115]. Для этого целесообразно использовать проволоочки с радиусами 10–80 нм. В расчетах использована 2-D-P ФГ с периодами $a=b \gg R$ и объемное ИУ для электрического поля, на основе которого построен функционал, определяющий ДУ. ФК является разреженным, и можно ввести его поперечную эффективную ДП $\varepsilon_{eff} \approx \varepsilon + \pi R^2(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)/a^2$, где ε и $\tilde{\varepsilon}$ – ДП основы и плазмы металла (использовано $\varepsilon = 1$). Рассчитаны нормированная пространственная дисперсия $\text{Re}(\gamma a)$ (рис. 13) и нормированное затухание $\text{Im}(\gamma a)$ (не приведено) для волны вдоль стержня с $k_z = \gamma$. Двумерное ИУ сформулировано относительно компоненты E_z в проволочке (учет E_ρ дает малую поправку). Поле на поверхности проволоочки считается не зависящим от угла φ , что справедливо для разреженной структуры при $R \ll a$ и $R \ll \lambda$. Сплошные кривые соответствуют основной дисперсионной ветви и действительным значениям k_x и k_y , изменяющимися в пределах первой зоны Бриллюэна. Волна втекает только в направлении z . Штриховым кривым соответствует случай, когда задаваемые реальные значения k_x и k_y при подстановке в ФГ умножались на $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$. Волна при этом слабо втекает в поперечном направлении, что почти не влияет на результаты. В интервале (Г,Х) $k_y = 0$ и $\kappa = \text{Re}(k_x)$, в интервале (Х,М) $\kappa = \text{Re}(k_x) + \text{Re}(k_y)$ при изменении только k_y , а в интервале (М,Г) $k_y = k_y$, при этом величина $\kappa = \text{Re}(\sqrt{k_x^2 + k_y^2})$ откладывалась в обратном порядке. Взято $k_0 a = 1$, $R/a = 0.05$, при этом кривые

1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствовали значениям: $\tilde{\varepsilon} = 3-10j$, $\tilde{\varepsilon} = -10-10j$, $\tilde{\varepsilon} = -100-1000j$, $\tilde{\varepsilon} = -900-1000j$, $\tilde{\varepsilon} = -3-50j$, $\tilde{\varepsilon} = -3-10j$. Эти значения могут соответствовать разным металлам, полуметаллам и полупроводникам при некоторых температурах. Также были рассчитаны дисперсии для серебряных и золотых нанопроводов с $R=20$ нм с учетом соответствующих им значений $\tilde{\varepsilon}$. Во всех случаях при хороших металлических свойствах (ниже оптических частот) волны чуть быстрые или чуть медленные с малыми потерями и втекающие. Потери и замедление возрастают в области оптически частот. Втекающие волны в 3-D-P структурах рассмотрены в работе [116].

9. Заключение

Рассмотрены несобственные и квазисобственные втекающие и вытекающие волны в различных структурах: от простейших, описываемых ДУ Ценнека и ДУ двумерных ПП до сложных, ДУ которых построены на основе решений ИУ, включая слоистые и периодические волноводы и структуры. Приведены ФГ и ИУ для многослойных и периодических плазмон-поляритонных структур. ДУ двумерных ПП получены методом ФГ. Рассмотренные структуры являются диссипативными, а их ДУ и волны комплексными. Найдены условия существования быстрой и медленной ПВЦ над плоской диссипативной средой. Показано, что ПВЦ в области $-2 < \varepsilon' < 0$ переходит в медленные и быстрые ПП. В диссипативной 2-D пленке ПП соответствует втекающая ПВ, а вытекание имеет место для активных структур ($\omega_c < 0$). Очень медленные втекающие ПП для малых положительных ω_c (при низких температурах) и вытекающие ПП для малых по модулю отрицательных ω_c (в активных пленках) суть квазичастицы, импульс которых $p = n\hbar k_0$, на порядки превышает импульс фотона.

Рассчитаны характеристики ПВЦ над плоской морской поверхностью и под ионосферой, а также волны вдоль неплоских поверхностей. Предложены антенны для возбуждения ПВЦ. Показано, что волна Зоммерфельда-Ценнека

переходит в ПВЦ при бесконечном увеличении радиуса провода (уменьшении λ). На оптических частотах при фиксированном отношении r/λ она становится азимутально симметричной поверхностной втекающей Е-волной ДВ. Прослежена аналогия между втекающими волнами ДВ, волноводов типа полый канал с диссипативными металлическими и диэлектрическими стенками и ПВЦ. Исследованы быстрые и медленные слабо втекающие волны в гиперболическом метаматериале из нанопроводов.

В рассмотренных структурах проанализированы значения ГС v_g , которые могут быть любыми: положительными, отрицательными (по отношению к v_p), превышающими c и бесконечными. В диссипативных структурах ГС не имеет обычно приписываемого ей смысла, при этом не существенно, каковы потери: большие или маленькие. К чему приводит абсолютизация понятия ГС можно посмотреть, например, в [117, 118]. Показана ошибочность выводов работ [10, 27, 28] относительно быстрой ПВЦ, основанных на такой абсолютизации ГС и ряде неточностей (разбор которых опускаем). Одна из неточностей – не учет втекания, приводящего для ПВЦ к условиям $v_g > c$ при $v_e < c$. В недавней работе [32], опровергающей (как и ряд приведенных выше публикаций) ошибочные работы [10, 27, 28], удивляет весьма осторожное высказывание по поводу первого условия с безуспешной попыткой решить как бы остающийся “открытым вопрос о физическом смысле ГС”! ПВЦ, описанная более 100 лет назад как первая из известных ПВ, в [32] трактуется как “особый тип поверхностных волн”, а принадлежность ее к “необычному типу волн” объясняется тем, что “общепринятая ГС” больше скорости света!

Математически как быстрая, так и медленная ПВЦ существуют. Заявленная в [32] высокая проводимость (и вообще проводимость) не требуется: нужна лишь любая диссипация. Условие ее перехода из медленной в быструю [4] на основе импедансного приближения и разложения по малому импедансу является неточным. Физически ПВЦ

существует как КПВ, получаемая при решении задачи о возбуждении структур конечными источниками. Интересной особенностью ПВЦ может быть лишь то, что $v_g > c$ даже при малой (бесконечно малой) диссипации (как и в зонах непропускания ЗС и ФК при бесконечно малых потерях). Обычно считается, что ГС при малой диссипации всегда можно использовать (как приближение к v_e). Для квазисобственных волн это так, но приближение ухудшается с ростом потерь. Для несобственных волн (к коим относятся и волны в запрещенных зонах) это делать нельзя ни при каких потерях.

Список литературы

1. Sommerfeld A *Math. Ann.* **47**, 317 (1896)
2. Sommerfeld A *Wied. Annalen* **67**, 233 (1899)
3. Born M Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld, in *Obligatory Notice of the Fellows of the Royal Society*. **8**, 272 (1952).
4. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988).
5. Zenneck J, *Ann. Physik* **23**, 846 (1907).
6. Sommerfeld A *Ann. Physik* **333** 665 (1909)
7. Zenneck J *Wireless telegraphy* (McGraw-Hill Book Company, Inc. New York – London 1915)
8. Байбаков В И, Дацко В Н, Кистович Ю В *УФН* **157** (6) 722 (1989)
9. Макаров Г И, Новиков В В, Рыбачек С Т *Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью*. (М.: Наука, 1991)
10. Кукушкин А В *УФН* **163** (2) 81 (1993) [Kukushkin A V *Phys. Usp.* **36** 81 (1993)]
11. Ling R T, Scholler J D, Ufimtsev P Ya *PIERS Online* **19** 49 (1998)
12. Ishimaru A, Rockway J D, Kuga Y, Lee S W *IEEE Trans.* **AP 48** (9) 1475 (2000)
13. Дацко В Н *Радиотехника и электроника* **48** (8) 954 (2003)
14. Ranfagni A, Fabeni P, Pazzi G P, Ricci A M, Trinci R et al. *J. Appl. Phys.* **100** 024910–1–5 (2006)
15. Дацко В Н, Копылов А А *УФН* **178** (1) 109 (2008)
16. Петров В *Зарубежное военное обозрение* **10** 27 (2008)
17. Кукушкин А В *УФН* **179** 801 (2009) [Kukushkin A V *Phys. Usp.* **52** 755 (2009)]
18. Башкуев Ю Б, Хаптанов В Б, Дембелов М Г, Нагуслаева И Б *III Всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь»* (М.: ИРЭ РАН, 2009)
19. Макаров Г И *Вестн. С.-Петерб. ун-та Сер. 4.* (4) 154 (2009)
20. Feng S, Halterman K, Overfelt P L, Bowling D. *Opt. Express* **17**, 19823–19841 (2009)
21. Башкуев Ю Б, Хаптанов В Б, Дембелов М Г *Письма в ЖТФ* **36** 3 88 (2010)
22. Sihvola A, Qi J, Lindell I V *IEEE Antennas and Propagation Magazine* **52** 1 124 (2010)
23. Bourlier C, Kubick'e G *2010 URSI Intern. Symposium on Electromagnetic Theory* 486 (2010)
24. Копылов А А *Проблема поверхностной электромагнитной волны Ценнека*. (РадиоСофт, 2011)
25. Копылов А А *Проектирование устройств и систем на поверхностной электромагнитной волне* (РадиоСофт, 2011)

26. Кукушкин А В, Зотов А В в сб. *Датчики и системы* (М.: Сенсиздат-Плюс Вып. 12, 2011), с. 39
27. Кукушкин А В, Рухадзе А А, Рухадзе К З *УФН* **182** (11) 1205 (2012)
28. Рухадзе А А, Рухадзе К З *Инженерная физика* (4) 21 (2011)
29. Минаев И М, Рухадзе А А *Инженерная физика* (3) 3 (2012)
30. Прямиков А Д, Бирюков А С *УФН* **183** (8) 863 (2013)
31. Дацко В Н, Суслов М О *Радиотехника и электроника* **58** (5) 503 (2013)
32. Шевченко В В *Журнал Радиоэлектроники* №7 (2013),
<http://jre.cplire.ru/jre/jul13/7/text.html>
33. Дацко В Н *Журнал Радиоэлектроники* №6 (2013),
<http://jre.cplire.ru/jre/jun13/3/text.html>
34. Weyl H *Ann. Physik* **365** 481 (1919)
35. Sommerfeld A *Ann. Physik* **81** 1135 (1926)
36. Fock V *Ann. Physik* **409** 401 (1933)
37. Van der Pol B *Physica* **2** 843 (1935)
38. Norton K A, *Nature* **135** 954 (1935)
39. Norton K A *Proc. IRE* **24** 1367 (1936) ; **25** 1203 (1937)
40. Burrows C R *Nature* **138** 284 (1936)
41. Burrows C R *Bell Syst. Tech. J.* **16** 45; 1203 (1937)
42. Wise W H *Bell Syst. Tech. J.* 1937 **16** 1 35 (1937)
43. Norton Y A *Proc. IRE* **29** 105 (1941)
44. Fano U *JOSA* **31** 3 213 (1941)
45. Мандельштам Л И, Папалекси Н Д (Ред.) Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности. Сб. статей (М.: - Л.: Гостехиздат, 1946)
46. Мандельштам Л И *О распространении волн. Полное собрание трудов*, т. 3 (М.: Изд-во АН СССР, 1950) с. 369
47. Barlow H M, Karbowiak A E *J. of the IEE* **1953** (11) 361 (1953)
48. Barlow H M, Cullen A L *Proc. of the IEE Part III: Radio and Communication Engineering* **100** Issue 68 329 (1953)
49. Wait J R, Campbell L L *J. of Geophysical Research* **58** (1) 21 (1953)
50. Barlow H M *IRE Trans AP* **8** (4) 449 (1960)
51. Barlow H M, Brown J *Radio Surface Waves* (Oxford University Press, 1962)
52. Краснушкин П Е, Яблочкин Н А *Теория распространения сверхдлинных волн* (М.: ВЦ АН СССР, 1963)
53. Fock V A *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems* (Oxford: Pergamon Press 1965)
54. Baños A *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space* (Oxford: Pergamon Press, 1966)
55. Barlow H E M *Proc. IEE* **114** (4) 421 (1967)
56. Barlow H M *Electronics Letters* **3** (7) 304 (1967)
57. Wait J R *Electromagnetic Waves in Stratified Media* (Oxford: Pergamon Press, New York, 1970)
58. Макаров Г И, Новиков В В, Орлов А Б *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **13** (3) 321 (1970)
59. Кашпровский В Е, Кузубов Ф А *Распространение средних радиоволн земным лучом* (М.: Издат-во Связь, 1971)
60. Barrick D E *Radio Science* 1971. **6** (5) 517 (1971)
61. Hil D A Wait J R *Radio Science* **13** 969 (1978)
62. Байбаков В И, Дацко В Н, Кистович Ю В *Письма в ЖТФ* **6** (7) 394 (1980)
63. Hil D A Wait J R *Ann. Telecommunic.* **35** (5–6) 179 (1980)
64. Hil D A Wait J R *Radio Science* **15** 637 (1980)
65. Wait J R *Wave Propagation Theory* (New York: Pergamon Press, 1981)

66. Байбаков В И, Кистович Ю В *Письма в ЖТФ* **50** с. 19, с. 1172 (1980); **51** с. 2597, с. 2599 (1981); **52** 846 (1982); **53** 1172 (1983)
67. Oliner A A *IEEE Trans. MTT* **32** 1022 (1984)
68. Кинг Р У П, Браун М. *ТИИЭР* **72** (5) 63 (1984) [King, R W P, Brown M F *Proceedings of the IEEE* **72** (5) 595 (1984)]
69. King, R W P *Journal of Applied Physics* **58** (9) 3612 (1985)
70. Petrillo L, Jangal F *Progress In Electromagnetics Research* **13** 17 (2010)
71. Schumann W O Z. *Naturforsch* **7a** 149 (1952)
72. Schumann W O *Zeitschrift und Naturforschung* **7a** 250 (1952)
73. Schumann W O *Nuovo Cimento* **9** 1116 (1952)
74. Simões F, Pfaff R, Freudenreich H *Geophysical Research Letters* **38** (22), L22101(5)
75. Stern E A, Ferrell R A *Phys. Rev.* **120** 130 (1960)
76. Stern F *Phys. Rev. Letters* **18** 546 (1967)
77. Allen S J, Tsui D S, Logan R A *Phys. Rev. Letters* **38** (17) 980 (1977)
78. Майер С А *Плазмоника. Теория и приложения* (М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011) [Maier S A *Plasmonics: Fundamentals and applications* Springer (2007)]
79. Guo Y, Newman W, Cortes C L, Jacob Z *Adv. Optoelectron.* **1** (2012) (<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1211/1211.0980.pdf>).
80. Ханкина С И, Яковенко В М *ФТТ* **9** (7) 2943 (1967)
81. Дацко В Н, Копылов АА *Патент РФ № 48076*. 29.04.2005.
82. Вайнштейн Л А *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (М.: Советское радио, 1966)
83. Davidovich M V, Stephuk J V in *Modeling in Applied Electromagnetics and Electronics* **9** (Ed M V Davidovich) (Saratov University Press, 2009) p. 13
84. Альтшулер Е Ю, Давидович М В, Стефюк Ю В *Радиотехника и электроника* **55** (1) 25 (2010)
85. Давидович М В, Стефюк Ю В *Известия ВУЗов. Радиофизика* **53** (1) 31 (2010)
86. Давидович М В, Стефюк Ю В *Оптика и спектроскопия* **109** (4) 643 (2010)
87. Давидович М В, Шиловский П А *ЖТФ* **82** (12) 79 (2012)
88. Давидович М В, Стефюк Ю В *Физика волновых процессов и радиотехнические системы* (4) 18 (2009)
89. Давидович М В *Законы сохранения и плотности энергии-импульса электромагнитного поля. Энергия, импульс и скорости их переноса квазифотоном в диспергирующей среде: Абрагама-Минковского контroversия*. (Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, 2012)
90. Давидович М В *Радиотехника и электроника* Т.39 (1) 53 (1994)
91. Марков Г Т, Чаплин А Ф *Возбуждение электромагнитных волн* (М.: Радио и связь, 1983)
92. Nefedov I S *Phys. Rev.* **B 82** 155423 (2010).
93. Ehrenfest P *Ann. D. Phys.* **33** 1571 (1910)
94. Давидович М В *Вопросы прикладной физики* **16** (Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2009) с. 16 [<http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11014.html>]
95. Вайнштейн Л А *УФН* **118** (2) 339 (1976)
96. Давидович М В *Законы сохранения и плотности энергии и импульса электромагнитного поля в диспергирующей среде* (Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013)
97. Рытов С М *ЖЭТФ* **17** (10) 930 (1947)
98. Давидович М В *Известия ВУЗов. Радиофизика.* **49** (2) 150 (2006)
99. Давидович М В *Письма в ЖТФ* **32** (22) 53 (2006)
100. Ахиезер А И, Ахиезер И А *Электромагнетизм и электромагнитные волны* (М: Высшая школа, 1985)

101. Давидович М В *ЖТФ* **80** (5) 40 (2010)
102. Белокопытов Г В *Волны в направляющих структурах* (М: Физич. ф-т МГУ, 2010)
103. Бараш Ю С, Гинзбург В Л *УФН* **118** (3) 523 (1976)
104. Стрелков Г М *Радиотехника и электроника* **51** (6) 672 (2006).
105. Абрамовиц М, Стиган И *Справочник по специальным функциям* (Под ред. М Абрамовица, И Стиган, М.: Наука, 1979) [M. Abramowitz and I.A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, NBS Applied Mathematics Series 55, Washington, DC (1964)]
106. Chaplik A V *Surface Science Reports* **5** 286 (1985)
107. Витлина Р З, Чаплик А В *ЖЭТФ* **81** 1011 (1981)
108. Ritchie R H *Phys. Rev* **106** 875 (1957)
109. Чаплик А В *ЖЭТФ* **60** (5) 1845 (1971)
110. Mikhailov S A, Ziegler K *Phys. Rev. Letters* **99** 016803–4 (2007)
111. Фалько В И, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **95** 1988 (1989) [Fal’ko V I, Khmel’nitskii DE *Sov. Phys. JETP* **68**, 1150 (1989)].
112. Давидович М В, Стефюк Ю В, Шиловский П А *ЖТФ* **82** (3) 7 (2012)
113. Nefedov I, Simovski C R *Physical Review* **B 84** 195459 (2011)
114. Narimanov E E, Li H, Barnakov Yu A, Tumkur T U, Noginov M A, arXiv:1109.5469v1
115. Silveirinha M G, Belov P A, Simovski C R *Phys. Rev.* **75**, 035108–1–12 (2007)
116. Давидович М В, Шиловский П А *ЖТФ* **83** (8) 90 (2013)
117. Давидович М В *УФН* **179** (4) 443 (2009)
118. Давидович М В *ЖТФ* **82** (3) 15 (2012)

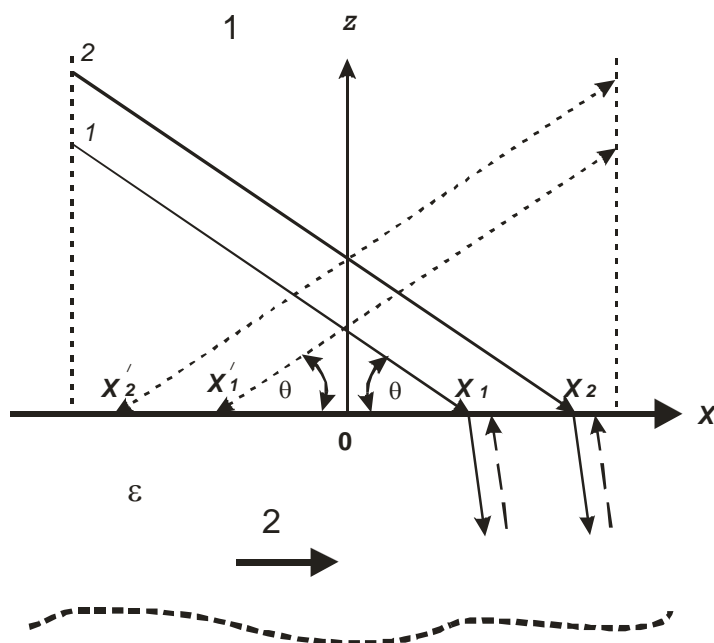


Рис. 1. Конфигурация с границей раздела вакуум (1) – полубесконечная плоскость (2) с ДП ε . Сплошные лучи 1, 2 соответствуют вытекающей ПВЦ. Штриховые лучи (среда 1, стрелки вверх) соответствуют вытекающей волне, штриховые лучи в среде 2 соответствуют ПП волне. Если среда 1 не вакуум и может поддерживать обратную волну, то штриховые лучи в ней со стрелками вниз соответствуют вытекающей из области 1 (в направлении движения фазы) “антиповерхностной” волне, энергия которой реально вытекает в область $z > 0$

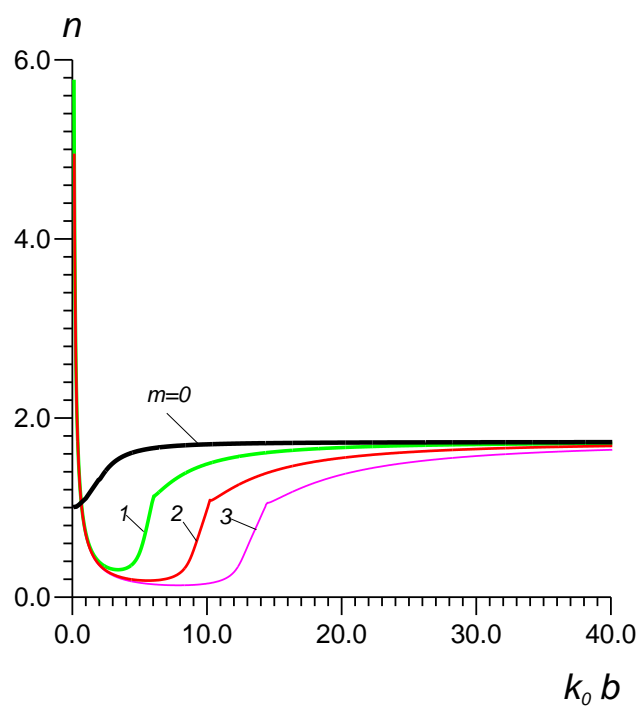


Рис. 2. Замедление четных волн LM_{2m} (четных волн $E_{0(2m)}$ [4]) для ДВ в виде пластины толщины b с ДП $\varepsilon = 3$ в зависимости от нормированного волнового числа

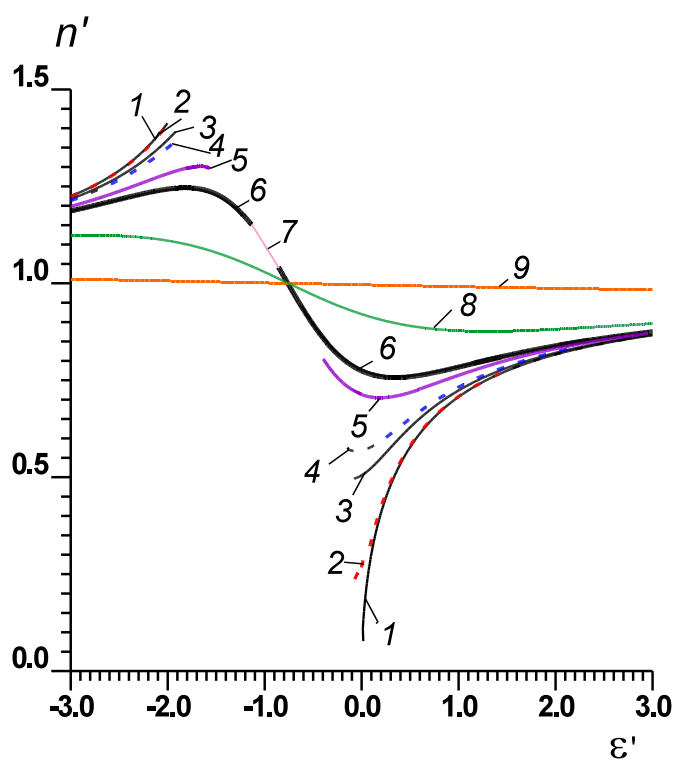


Рис. 3. Замедление ПВЦ в зависимости от ε' при разных диэлектрических потерях ε'' : $\varepsilon'' = 10^{-7}$ (кривая 1), 0.1 (2), 0.4 (3), 0.5 (4), 0.8 (5), 0.99 (6), 1.0 (7), 2.0 (8), 10.0 (9). Разрывы кривых соответствуют модам ПП

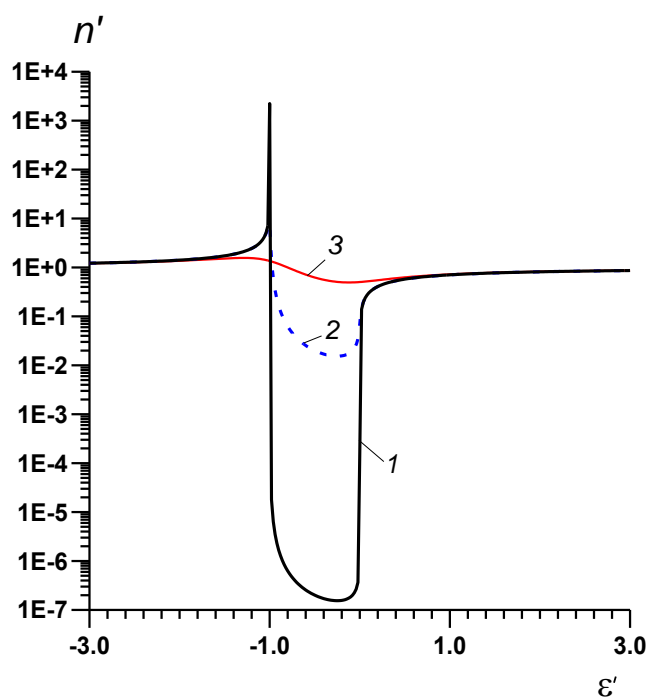


Рис. 4. Переход медленные ПВЦ – медленные ПП – быстрые ПП – быстрые ПВЦ в зависимости от ε' : $\varepsilon'' = 10^{-7}$ (кривая 1), 0.1 (2), 0.4 (3)

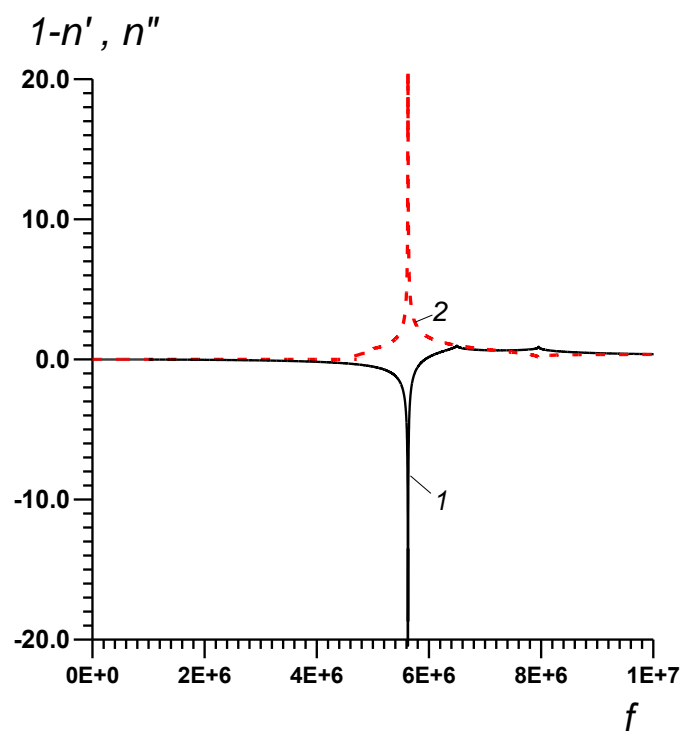


Рис. 5. Отклонение замедления от единицы $1-n'$ (кривая 1) и коэффициент потерь n'' (2) в зависимости от частоты f (Гц) для плоской границы ионосферы с параметрами $\omega_p = 50$ МГц, $\omega_c = 10$ КГц

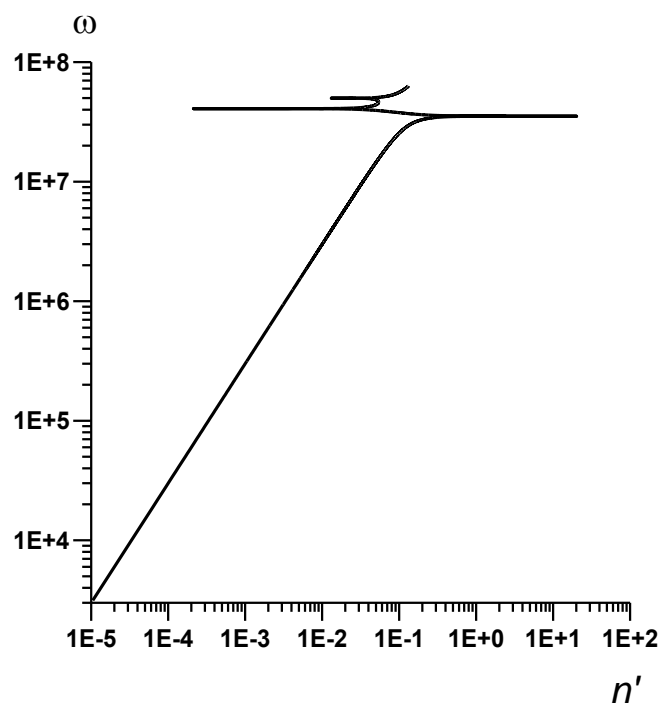


Рис. 6. Дисперсия (зависимость ω , Гц от КЗ) для ПВЦ под плоской границей ионосферы ($\omega_p = 50$ МГц, $\omega_c = 10$ КГц)

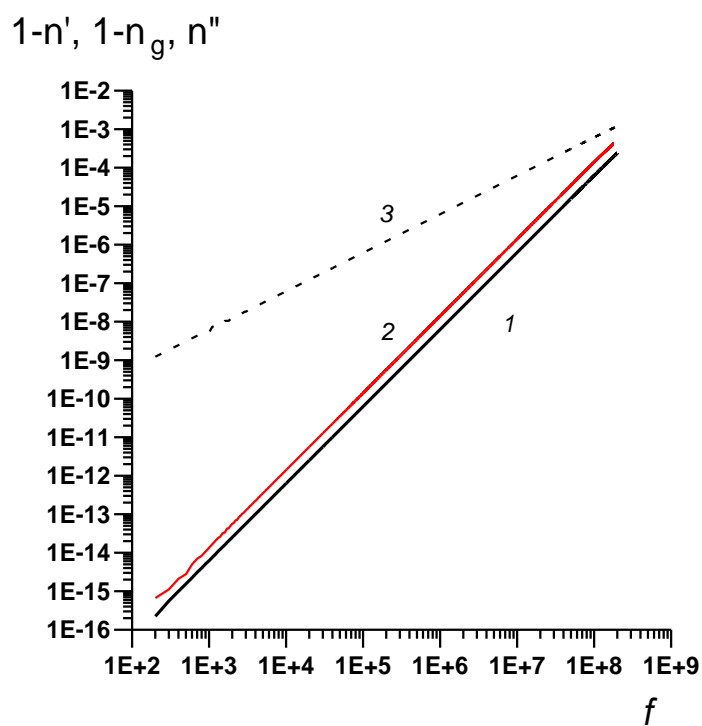


Рис. 7. Отклонение от единицы замедления ($1-n'$, кривая 1), группового замедления ($1-n_g$, кривая 2) и коэффициент потерь (n'' , кривая 3) для ПВЦ над морем в зависимости от частоты (Гц)

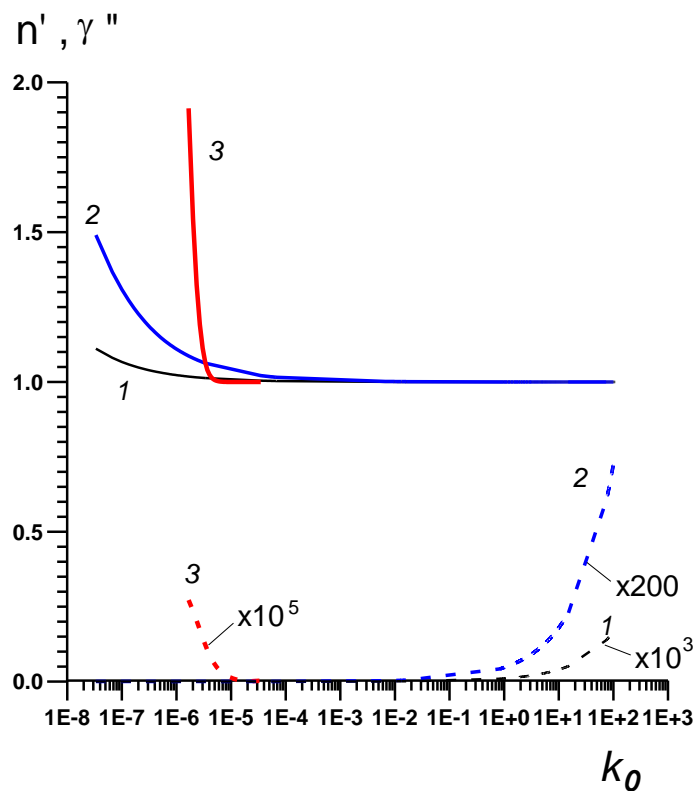


Рис. 8. Замедление $n' = \gamma' / k_0$ и потери γ'' волны Зоммерфельда вдоль провода радиуса $r = 1$ мм (кривые 1) и $r = 5$ мм (кривые 2,3). Кривые (1, 2) – расчет на основе ДУ (43) при проводимости $\sigma_0 = 5.7 \cdot 10^7$ См/м (медь), кривая 3 – на основе ДУ (44) для золота

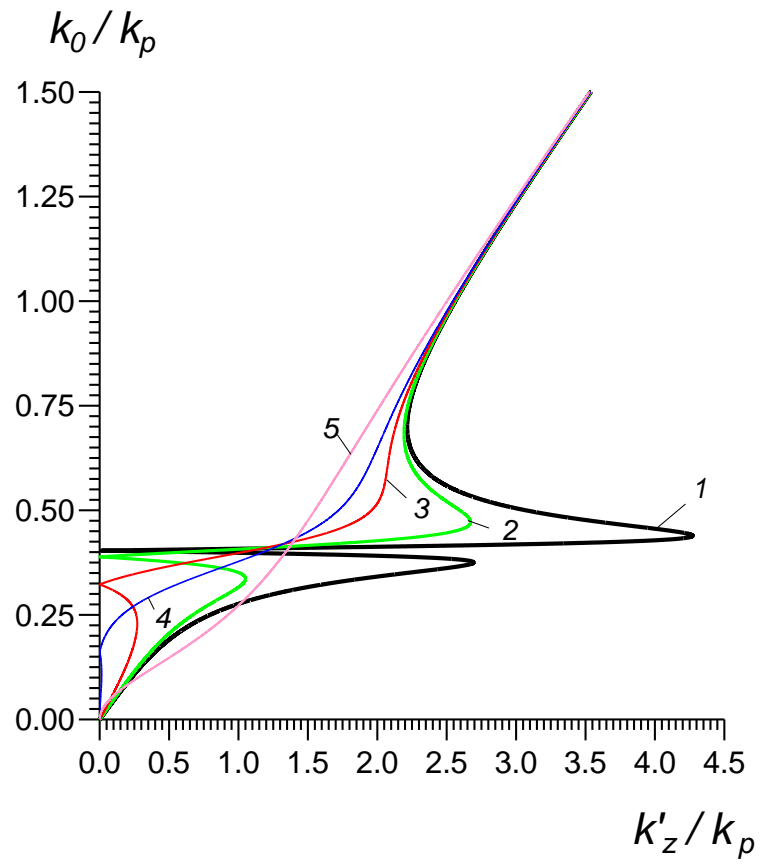


Рис. 9. Нормированная дисперсия для ДУ (36) при $\varepsilon_r = 11$, $\varepsilon = 5$ и разных частотах столкновений (в Гц): $\omega_c = 10^{15}$ (кривая 1); $2 \cdot 10^{15}$ (2); $4 \cdot 10^{15}$ (3); $6 \cdot 10^{15}$ (4); $1.6 \cdot 10^{16}$ (5)

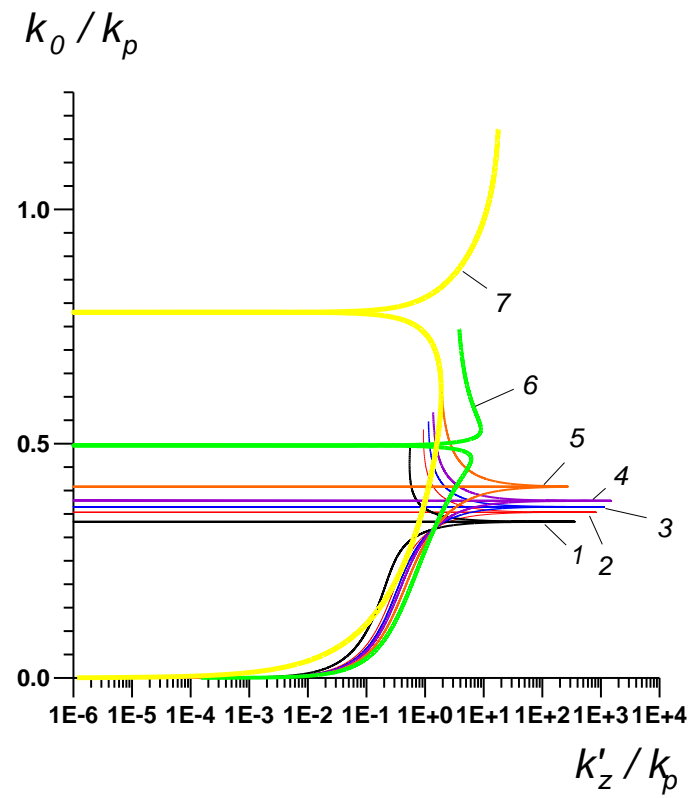


Рис. 10. Результаты вычисления нормированной дисперсии для ДУ (36): $\varepsilon = 1$, $\omega_c = 10^{12}$ (кривая 1); $\varepsilon = 2$, $\omega_c = 10^{12}$ (2); $\varepsilon = 2.5$, $\omega_c = 10^{12}$ (3); $\varepsilon = 3$, $\omega_c = 10^{12}$ (4); $\varepsilon = 4$, $\omega_c = 10^{13}$ (5); $\varepsilon = 6$, $\omega_c = 10^{15}$ (6); $\varepsilon = 9$, $\omega_c = 10^{16}$ (7) (частоты в Гц)

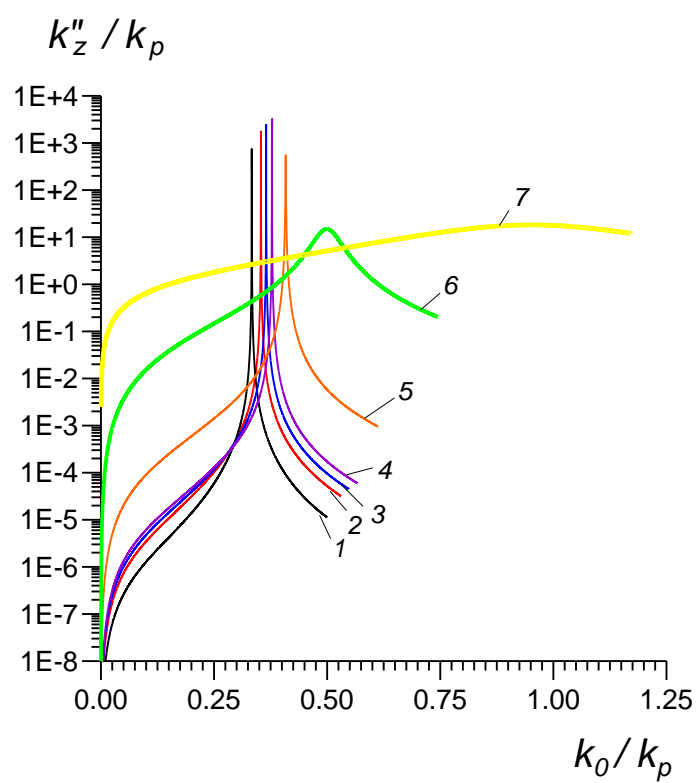


Рис. 11. Нормированные к плазменному волновому числу потери для кривых дисперсии рис. 10

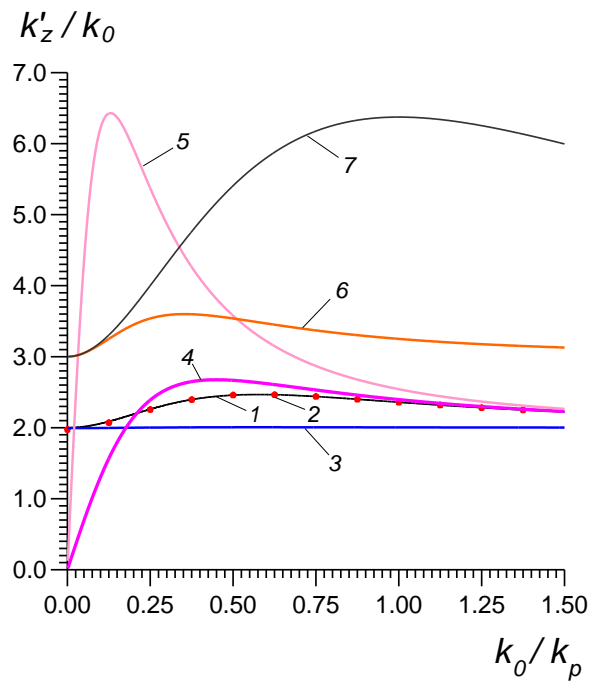


Рис. 12. Замедление в зависимости от нормированного волнового числа для $\varepsilon_r = 1$ (кривые 1–6) и $\varepsilon_r = 8$ (кривая 7) при разных частотах столкновений (Гц) и ДП ε : $\omega_c = 10^{14}$ (кривая 1); $\omega_c = 10^{15}$ (2); $\omega_c = 5 \cdot 10^{15}$ (3); $\omega_c = 10^{16}$ (4); $\omega_c = 4 \cdot 10^{16}$ (5); $\omega_c = 10^{16}$ (6); $\omega_c = 10^{12}$ (6,7). Кривые (1–5) построены для $\varepsilon = 4$, кривые (6,7) – для $\varepsilon = 9$

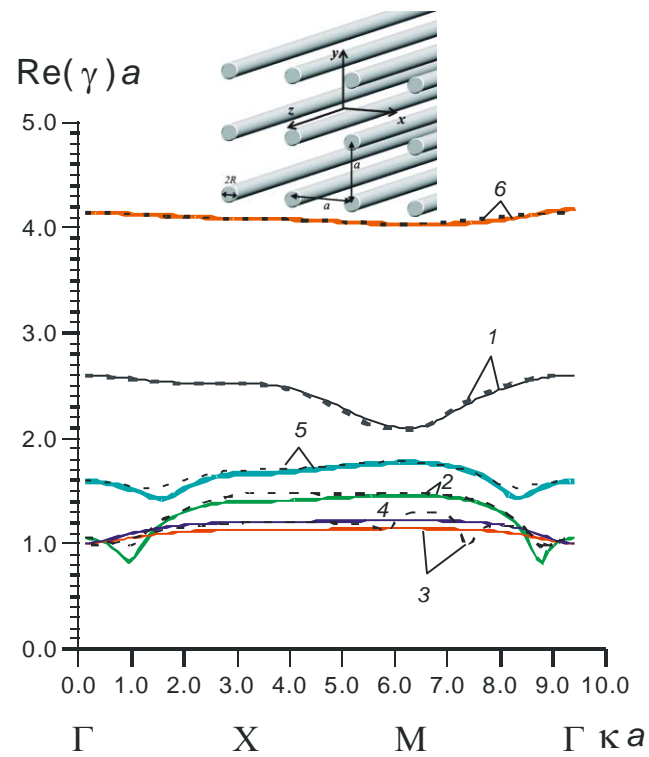


Рис. 13. Пространственная дисперсия втекающей волны вдоль стержней при использовании реальных (сплошные кривые) и комплексных (штриховые кривые) значений k_x и k_y : $\tilde{\epsilon} = 3 - i10$ (кривые 1); $-10 - 100i$ (2); $-100 - 1000i$ (3); $-900 - 1000i$ (4); $-3 - 50i$ (5); $-3 - 10i$ (6)

Подрисуночные подписи

к статье М.В. Давидовича

“Втекающие и вытекающие несобственные моды: анализ диссипативных дисперсионных уравнений и волна Ценнека”

Рис. 1. Конфигурация с границей раздела вакуум (1) – полубесконечная плоскость (2) с ДП ε . Сплошные лучи 1, 2 соответствуют втекающей ПВЦ. Штриховые лучи (среда 1, стрелки вверх) соответствуют вытекающей волне, штриховые лучи в среде 2 соответствуют ПП волне. Если среда 1 не вакуум и может поддерживать обратную волну, то штриховые лучи в ней со стрелками вниз соответствуют втекающей из области 1 (в направлении движения фазы) “антиповерхностной” волне, энергия которой реально вытекает в область $z > 0$

Рис. 2. Замедление четных волн LM_{2m} (четных волн $E_{0(2m)}$ [4]) для ДВ в виде пластины толщины b с ДП $\varepsilon = 3$ в зависимости от нормированного волнового числа

Рис. 3. Замедление ПВЦ в зависимости от ε' при разных диэлектрических потерях ε'' : $\varepsilon'' = 10^{-7}$ (кривая 1), 0.1 (2), 0.4 (3), 0.5 (4), 0.8 (5), 0.99 (6), 1.0 (7), 2.0 (8), 10.0 (9). Разрывы кривых соответствуют модам ПП

Рис. 4. Переход медленные ПВЦ – медленные ПП – быстрые ПП – быстрые ПВЦ в зависимости от ε' : $\varepsilon'' = 10^{-7}$ (кривая 1), 0.1 (2), 0.4 (3)

Рис. 5. Отклонение замедления от единицы $1 - n'$ (кривая 1) и коэффициент потерь n'' (2) в зависимости от частоты f (Гц) для плоской границы ионосферы с параметрами $\omega_p = 50$ МГц, $\omega_c = 10$ КГц

Рис. 6. Дисперсия (зависимость ω , Гц от КЗ) для ПВЦ под плоской границей ионосферы ($\omega_p = 50$ МГц, $\omega_c = 10$ КГц)

Рис. 7. Отклонение от единицы замедления ($1 - n'$, кривая 1), группового замедления ($1 - n_g$, кривая 2) и коэффициент потерь (n'' , кривая 3) для ПВЦ над морем в зависимости от частоты (Гц)

Рис. 8. Замедление $n' = \gamma' / k_0$ и потери γ'' волны Зоммерфельда вдоль провода радиуса $r = 1$ мм (кривые 1) и $r = 5$ мм (кривые 2,3). Кривые (1, 2) – расчет на основе ДУ (43) при проводимости $\sigma_0 = 5.7 \cdot 10^7$ См/м (медь), кривая 3 – на основе ДУ (44) для золота

Рис. 9. Нормированная дисперсия для ДУ (36) при $\varepsilon_r = 11$, $\varepsilon = 5$ и разных частотах столкновений (в Гц): $\omega_c = 10^{15}$ (кривая 1); $2 \cdot 10^{15}$ (2); $4 \cdot 10^{15}$ (3); $6 \cdot 10^{15}$ (4); $1.6 \cdot 10^{16}$ (5)

Рис. 10. Результаты вычисления нормированной дисперсии для ДУ (36): $\varepsilon = 1$, $\omega_c = 10^{12}$ (кривая 1); $\varepsilon = 2$, $\omega_c = 10^{12}$ (2); $\varepsilon = 2.5$, $\omega_c = 10^{12}$ (3); $\varepsilon = 3$, $\omega_c = 10^{12}$ (4); $\varepsilon = 4$, $\omega_c = 10^{13}$ (5); $\varepsilon = 6$, $\omega_c = 10^{15}$ (6); $\varepsilon = 9$, $\omega_c = 10^{16}$ (7) (частоты в Гц)

Рис. 11. Нормированные к плазменному волновому числу потери для кривых дисперсии рис. 10

Рис. 12. Замедление в зависимости от нормированного волнового числа для $\varepsilon_r = 1$ (кривые 1–6) и $\varepsilon_r = 8$ (кривая 7) при разных частотах столкновений (Гц) и ДП ε : $\omega_c = 10^{14}$ (кривая 1); $\omega_c = 10^{15}$ (2); $\omega_c = 5 \cdot 10^{15}$ (3); $\omega_c = 10^{16}$ (4); $\omega_c = 4 \cdot 10^{16}$ (5); $\omega_c = 10^{16}$ (6); $\omega_c = 10^{12}$ (6,7). Кривые (1–5) построены для $\varepsilon = 4$, кривые (6,7) – для $\varepsilon = 9$

Рис. 13. Пространственная дисперсия втекающей волны вдоль стержней при использовании реальных (сплошные кривые) и комплексных (штриховые кривые) значений k_x и k_y : $\tilde{\varepsilon} = 3 - i10$ (кривые 1); $-10 - 100i$ (2); $-100 - 1000i$ (3); $-900 - 1000i$ (4); $-3 - 50i$ (5); $-3 - 10i$ (6)

Flowing inside wave and leakage improper waves: analysis of dissipative dispersion equations and Zenneck wave

M.V. Davidovich

*National Research Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky,
Ul. Astrakhanskaya, 83, 410012, Saratov, Russian Federation
Phone (845) 2736650, Fax (845) (845) 227-85-29.
E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru*

We consider the complex flowing inside and leakage improper and quasi-proper flowing inside electromagnetic waves in dissipative metal and metal-dielectric structures and on the boundary interfaces of dissipative media described by complex dispersive equations. The Green's functions and integral equations for multilayer and periodic structures describing such flowing inside and leakage surface plasmons (SP) have been resulted. The properties and conditions of existence of fast and slow flowing inside (gliding) Zenneck surface wave (ZSW) over the sea and under the ionosphere are defined as well as two-dimensional SP, waves in the hyperbolic metamaterial, and quasi-surface waves in the presence of curvature of the surface. It is shown that in the region $-2 < \varepsilon' < 0$ the ZSW goes into fast and slow SP. The phase v_p and group v_g velocities in such dissipative structures are investigated and it is shown that there may be cases $v_g > c$, $v_g = \pm\infty$ even with small dissipation. It was shown the fallacy of the conclusion of some works about the impossibility of the existence of fast ZSW.

P.S.

Статья была направлена в УФН, откуда пришло решение:

Российская академия наук
Редакция журнала «Успехи физических наук»
119991 Москва, Ленинский проспект д. 53
Тел. (499) 132-62-65. Тел./Факс. (499) 190-42-44, (499) 132-63-48.
E-mail: ufn@ufn.ru
№ 4830/1
19 ноября 2013 г. М.В. Давидовичу
Уважаемый Михаил Владимирович!
Ваша статья «Втекающие и вытекающие несобственные моды: анализ диссипативных дисперсионных уравнений и волна Ценнека» была рассмотрена вместе с поступившим на Вашу статью отзывом независимого рецензента.
Учитывая критический характер отзыва, было принято решение отказаться от публикации Вашей статьи в журнале УФН.
Направляем Вам отзыв на Вашу статью.
Главный редактор
журнала «Успехи физических наук»
академик РАН

Л.В. Кельдыш

С рецензией абсолютно не согласен. Она явно предвзятая, причем большинство ее утверждений "против" ошибочные. В работе принципиально не рассматриваются объемные волны и непрерывный спектр, но даны соответствующие ссылки. Теорема Леонтовича, как это и показано в работе, для несобственных волн неприменима. Рецензию прилагаю.
М.Давидович

РЕЦЕНЗИЯ

на статью М В Давидовича «Втекающие и вытекающие несобственные моды: анализ диссипативных дисперсионных уравнений и волна Ценнека»
Статья М В Давидовича посвящена многократно освещенной в научной литературе теме об условиях распространения и существования электромагнитных поверхностных волн (ПВ) - медленных и быстрых, несобственных вытекающих и, по терминологии Автора, несобственных втекающих волн (синоним ПВ) в различных диссипативных, и, главным образом, плоских структурах. Затрагивается тема условий существования квазиповерхностных волн при наличии искривлений направляющей поверхности. Рассматриваются достаточно сложные плоские структуры, для вывода дисперсионных уравнений (ДУ) которых используются функции Грина. Отдельно рассмотрен вопрос о ПВ Ценнека над морской поверхностью, включая вопросы влияния ионосферы. Проводится попытка доказательства ошибочности некоторых опубликованных в самое последнее время работ, в том числе и на страницах УФН, посвященных теме физического смысла волны Ценнека.

Работу в представленном виде публиковать нельзя по следующим причинам.

Она превышает все нормы УФН и скорее представляет монографию. Ее следует разбить на 2 части; в первой изложить идеологию автора о «втекающих и вытекающих модах», равно как о «несобственных и квазисобственных модах» в целостной картине явлений, сопровождающих физические процессы в открытых волноводах. Вторую часть нужно посвятить критике работ [10,27,28, 29]. Думаю, не все физики знакомы с такой терминологией, которая должна быть хорошо адаптирована к физике соответствующих волновых процессов во всем их объеме.

По поводу последнего и далеко не стандартной терминологии Автора, вынесенной к тому же в название статьи, требуется сказать следующее уже теперь, еще до того, как Автор приступит к выполнению этой задачи.

В теории открытых волноводов аксиомой является то, что в любом варианте формулировки этой теории, которые были реализованы, например, в [1] и [2], (i) невозможно обойтись без непрерывного спектра волн, а вот (ii) присутствие диссипации при этом совсем необязательно.

Что касается пункта (i), то невозможно предположить, чтобы Автор этого не знал, но у него нет ни одного упоминания о том, какую роль играет в теории открытых волноводов непрерывный спектр. А это, конечно, важно по следующей причине.

Непрерывный спектр волн, как хорошо всем известно, описывает радиационные потери, которые присутствуют в открытых волноводах и отсутствуют в волноводах экранированных, и поэтому его там нет. Вследствие этого теория закрытых волноводов много проще теории открытых волноводов. С этим связано то, что первую можно свести, разумеется, в известном смысле к описанию поведения дисперсионных характеристик собственных волн. Картина получится целостной и правильной. А вторую невозможно представить в целостном виде одним только поведением дисперсионных кривых собственных и несобственных мод. А именно по этому пути пошел Автор (с этим связано обилие графического материала в статье, которое сильно засоряет ее текст и уводит от главных вопросов теории) и в этом его принципиальная ошибка.

Она начинается сильно сказываться уже тогда, когда Автор на стр. 14, 15 описывает трансформацию мод ДВ (плоского, в частности) при изменении частоты от больших ее значений до нуля. Автор замечает, что с приближением частоты к нулю, на некоторой конечной частоте любая быстрая вытекающая несобственная (БВН) мода переходит в медленную вытекающую несобственную (МВН) моду. Таким образом, в длинноволновой области все моды, кроме основной поверхностной, будут МВН. Судя по тексту, Автор отводит им роль описывать радиационные потери в этой частотной области, где уже нет истинно вытекающих (в физическом смысле) быстрых несобственных мод.

Так, на с. 15 он пишет: «Т.о., вытекающая мода может быть как быстрой,

так и медленной...». По-видимому, логика такая: роль описывать радиационные потери переходит от БВН мод (в литературе их называют просто «вытекающими волнами») к МВН модам. На с. 12. Автор пишет о МВН модах следующее. «Реально (курсив мой) они присутствуют в экспоненциально малой окрестности у источника ..., имеющего сверхнизкие частоты в спектре.»¹ Это утверждение Автора вообще ниоткуда не следует, т.к. радиационные потери в этой области частот в известных вариантах теории открытых волноводов, [1] и [2], описываются, конечно, непрерывным спектром волн. А МВН моды в обеих этих теориях - это нефизические волны, для которых, тем не менее, имеются соответствующие решения ДУ, о чем весьма подробно говорит Автор, вменяя себе это в заслугу. Но они не заслуживают столь пристального внимания, это не физические волны и это только запутывает читателя. Ведь автор не дает своей целостной картины явлений, которая должна отличаться от той, которая есть в литературе [1,2].

¹ Здесь можно усмотреть намек Автора на то, что если считать МВН реальными модами открытого волновода, то все будет так же, как в волноводах экранированных, где на сверхнизких частотах высшие реактивно

затухающие моды экранированного волновода реально присутствуют в ближайшей окрестности любой

неоднородности тракта. Вообще, текст статьи буквально насыщен неверными или, по крайней мере, очень сомнительными утверждениями Автора. Чего стоят, например, его рассуждения о возбуждении обычной «вытекающей волны» (физической волны).

На стр. 6 он говорит: «Вытекающие волны ... , что самое главное, тесно связаны с источником. Это означает, что такую математически существующую волну в чистом виде (курсив мой) создать и выделить нельзя: требуется бесконечно мощный бесконечно долго действующий источник...».

На самом деле такая волна в чистом виде локализована, как известно [1, 2], в некотором конечном угловом секторе пространства (двумерный случай) с вершиной в точке локализации источника (вблизи источника) или вблизи неоднородности тракта в точке локализации его неоднородности (вдали от источника). Для этого питающий генератор должен, конечно, работать на частотах, где есть решения ДУ для быстрой несобственной волны (но только не для медленной несобственной волны). В пределах этого углового сектора (угол раскрытия - острый, одна из образующих лежит на волноведущей плоскости) волна (вопреки еще одному неверному утверждению Автора) удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда на радиальной бесконечности (а это только и требуется). Поэтому генератору вообще не нужны больших мощностей для возбуждения такой волны на любой неоднородности тракта, находящейся на большом удалении от источника. Туда способна проникнуть основная ПВ волновода с конечной энергией, возбуждаемая генератором и успешно оторвавшаяся от источника. Она и будет являться причиной возбуждения вытекающей волны вдали от источника на какой-либо неоднородности тракта. Что касается ПВ, то из всех решений ДУ в задаче на собственные значения должны отбираться в качестве физических собственных волн только такие моды, которые обладают способностью отрываться от источника². У Автора это не так. На той же стр. 6 он пишет: (iii) «Такой же несобственной (! - Рецензент) волной, но еще более привязанной к источнику, является и втекающая (курсив мой) ПВЦ (поверхностная волна Ценнека)». О смысле этого высказывания Автора будет сказано ниже.

Вообще, как мы видим, Автор для обычных ПВ - и медленных и быстрых - предлагает название «втекающих волн».

Образцом для подражания (по принципу контрапункта) для введения этой терминологии являются, безусловно, вытекающие волны.

Однако контрапункт не выполняется точно, и этот принцип здесь не проходит по следующей причине.

Для вытекающих волн свойство вытекания является универсальным и поэтому название точно отражает это фундаментальное свойство волны.

2 Отбор физических мод ДУ в теории закрытых волноводов много проще. Там нет граничного условия для поля

на поперечной бесконечности. Несобственная волна остается вытекающей при любых условиях: в

диссипативном ($V > 0$) и в недиссипативном ($V = 0$) случаях, равно как и при наличии активной среды ($V < 0$).

Для ПВ амбивалентное свойство втекания не является столь же универсальным признаком, потому что волна является втекающей только для $s''' > 0$; для v'' — о волна не является ни втекающей, ни вытекающей, а для $e'' < 0$ она будет, конечно, вытекающей.

Поэтому мы считаем, что этот термин, который для Автора очень важен, — он даже вынес его в заголовок, — не отражает фундаментальных свойств ПВ и поэтому должен быть, безусловно, отброшен.

Теперь рассмотрим пункт (И).

Теория открытых волноводов в обоих вариантах формулировки, [1] и [2], может формулироваться применительно к не диссипативным системам так же успешно, как и применительно к диссипативным.

Было бы очень плохо, если бы это было не так, потому что тогда одно из главных положительных и фундаментальных свойств гамильтоновых систем было бы нарушено. К счастью, этого никогда не бывает.

Поэтому у физиков выработался «символ веры», что (j) поведение реальных систем с небольшой диссипацией практически не отличается от идеализированного случая ее полного отсутствия.

Что можно сказать о требовании обязательного учета трения при формулировке закона инерции? Только то, что если бы оно было законным, тогда бы мы до сих пор имели физику Аристотеля, а не то, что имеем теперь. Автор с этим не согласен. Иначе, как можно понять его текст на стр. 15?

Цитируем.

«Теперь следует определить, что же такое ПВЦ. Во-первых, это ПВ, причем в диссипативных структурах, что весьма важно. Диссипация обязательна (курсив мой): при ее отсутствии плоская ПВЦ превращается в волну, падающую без отражения под углом Брюстера /4/.»

В общетеоретическом контексте дальнейшие комментарии излишни. Но в плане обсуждения частных вопросов теории открытых волноводов они нужны, т.к. непосредственно касаются одной из важнейших тем статьи Автора по поводу физического смысла быстрой ПВ, т.е. волны Ценнека над плоской поверхностью раздела двух сред, одна из которых морская вода, а другая вакуум. В этом пункте текст Автора по ходу изложения его на всем пространстве статьи излишне эмоционален; отсюда заключаем, что эта тема едва ли не самая главная его мотивация.

Естественно, что в своем комментарии мы будем следовать общепринятому принципу 0, а не той ложной идеологии, которой придерживается Автор.

То, что при $b' \rightarrow 0$ быстрая ПВ Ценнека переходит в волну Брюстера, которая, конечно, не имеет никакого отношения к решению задачи насобственные значения, является дополнительным аргументом, усиливающим

аргументацию авторов работ /10, 27, 28, 29/, которым пытается возражать Автор.

Действительно, для сколь угодно малых значений e'' (например, морская вода в коротковолновой области или в пределе $\cos \theta \rightarrow 0$) ПВЦ будет по-прежнему быстрой и будет по-прежнему (при $e'' \neq 0$) иметь характер поверхностной волны, но ее практически нельзя будет отличить от однородной плоской волны, падающей на границу раздела двух сред из вакуума под углом Брюстера.

Экспериментатор, измерив характеристики такой волны, придет к заключению, что это плоская волна, посланная удаленным от границы источником, а не волноводная волна, направляемая границей раздела двух сред.

За теоретиком, который решал задачу на собственные значения, а получил быструю ПВ, которую невозможно отличить от однородной плоской волны, остается выбор. Отбросить это решение задачи на собственные значения (отбросить вообще быстрые ПВ как собственные волны открытого волновода),

как не физическое, но только в этом смысле, а не вообще, или оставить его. В последнем случае он столкнется с неразрешимой проблемой. Какие аргументы он должен привести, которые могли бы кого-либо убедить, что такая волна может считаться волноводной волной, которая направляется границей раздела двух сред вдоль этой границы, совершенно отвлекаясь при этом от вопроса о физической возможности ее возбуждения реальной антенной. Напомним, что всегда при постановке задачи на собственные значения теоретики вполне обоснованно отвлекаются от подобных вопросов. В этом суть самой задачи.

Когда аргументов нет, а их действительно нет, и не может быть, но, если это кому-то и зачем-то нужно, применяется испытанный прием. Пускается в ход искусство казуистики, например, специально вводится новый термин, который все и объясняет! В данном случае этот новый (для теории волноводов) термин - «квазиволна» (с. 27, 44). Термин обозначает особую волноводную волну, но, увы, намертво привязанную к источнику, от которого она не может никак оторваться. В другом месте текста описание этого «свойства» Автор вменяет другому термину. Так, из приведенной выше цитаты (iii) можно понять, что если Автор называет собственную ПВЦ несобственной, то это должно указывать на то, что такая волна привязана к источнику. Трудно понять, чего хочет добиться Автор своей путаной терминологией.

Между тем, последовательное применение указанного в пункте (j) принципа, истинность которого проверена всем ходом развития теоретической физики, решает проблему мгновенно.

Известно [27], что ДУ Ценнека для $\epsilon'' > 0$ и $\epsilon'' = 0$ не удовлетворяется, т.е. в отсутствие диссипации при указанных условиях у задачи на собственные значения решений нет. Последовательно мыслящий физик, испытывающий полное доверие к принципу (j), сразу же скажет, что в ближайшей эпсилон-окрестности по параметру ϵ'' у задачи на собственные значения не может быть физически значимых решений. Если же они у математиков есть, то это математический артефакт.

И действительно, в математической формулировке сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для идеализированной модели бесконечного волновода такие решения появляются сразу же, если слегка изменить условия, - ввести в систему, как требует Автор, сколь угодно малую диссипацию. Появившемуся решению будет соответствовать быстрая ПВ, т.е. ПВЦ, которую невозможно отличить от волны Брюстера, поскольку введенное в задачу ненулевое значение ϵ'' по порядку величины, который мы можем менять как угодно, лежит за пределами точности измерений (компьютерных, в том числе, т.к. мантисса числа в арифметике с плавающей запятой всегда ограничена).

Тем не менее, повторяем, что если параметр s'' в точности равен нулю (аналитический нуль), то решение скачком исчезает. Куда же подевалось это решение? Пропажа легко обнаруживается, но совсем в другой области. А именно, - в оптике. Пропавшее решение скачком становится решением для волны Брюстера (но это уже другая тема; это задача рассеяния однородной плоской волны на границе раздела двух сред, а не задача на собственные значения в теории открытых волноводов).

Итак, правильное решение этой «загадки» скачкообразного поведения решений ДУ Ценнека для физика очевидно. Он без колебаний и сожалений отбросит это математически безукоризненное решение задачи на собственные значения, по крайней мере, в условиях малой диссипации как нефизическое только на том основании, что для него требование (j) является фундаментальным. Это правильное решение.

В тексте статьи можно найти и другие противоречия и места, где Автор противоречит сам себе или обещает доказать ошибочность статей [10, 27, 28, 29], но реальных доказательств не приводит, а ссылается на статью [32], которую мы считаем ошибочной.

Первым признаком ошибочности основных выводов работы [32] является недопустимое наличие в них парадокса, который легко обнаружить, если опять-таки последовательно придерживаться принципа (j). Для реальной физики он

является, безусловно, фундаментальным и обязательным.

Автор статьи [32/ (ссылка [3] в нашем списке) пытается доказать ошибочность статьи [27/ ([4] в нашем списке).

В [3] не оспаривается результат статьи [4], что для волны Ценнека над морской водой в длинноволновой области, когда $s''Q s'$ и $s''Q 1$, групповая скорость (ГС) волны больше скорости света c в вакууме. В [4] на этом основании делается вывод о нефизичности быстрой ПВ, т.е. собственно волны Ценнека в подлинно историческом контексте образования этого названия волны в науке. Тем не менее, в [3] предпринята неудачная попытка вычислить энергетическую скорость (ЭС) распространения волны Ценнека в длинноволновой области по формуле Умова-Пойнтинга.

В [3] получен следующий ошибочный результат: $ЭС < c$, в то время как $ГС > c$. Парадокс заключается как раз в этом.

Для гамильтоновых систем существует теорема М. А. Леонтовича [5], содержание которой сводится к утверждению, что в отсутствие диссипации, для любой волны, не только поверхностной и не только электромагнитной, выполняется равенство: (jj) $ЭС = ГС$. В теореме имеется в виду выполнение условий, когда понятие ГС, которое вводится для квазимонохроматических волн при выполнении вполне определенных в [5] условий, обладает смыслом скорости распространения огибающей узкополосного волнового возмущения. Закон дисперсии волны Ценнека, вопреки бездоказательным рассуждениям на этот счет автора работы [3], удовлетворяет требованиям теоремы Леонтовича. Но система диссипативная и требование теоремы отсутствия диссипации нарушено. Однако, несмотря на то, что в морской воде в длинноволновой области выполняется условие $e''P 1$ и, следовательно, в морской воде диссипация сильная, общие потери энергии волны при ее распространении над морской поверхностью составляют, как известно, ничтожно малую величину, потому что волна практически полностью вытеснена из толщи морской воды в вакуум. Иначе говоря, система является слабо диссипативной. В этих условиях, согласно правилу (j), общие теоремы, доказанные для гамильтоновых систем, как то теорема Леонтовича (jj), остаются справедливыми. Следовательно, в длинноволновой области для волны Ценнека должно выполняться равенство (jj). А этого в статье [3] нет, что и является верным признаком ошибочности выполненного в [3] вычисления ЭС, т.к. сделать ошибку при вычислении ГС невозможно из-за его простоты. Нетрудно установить, в каком пункте вычисления ЭС ошибся автор статьи [3], но это уже выходит за рамки этой рецензии.

Итак, на основании всего вышеизложенного считаю, что статью М В Давидовича в представленном виде публиковать на страницах УФН нецелесообразно.

1. Шевченко В В Плавные переходы в открытых волноводах (М.: Наука, 1969)
2. Кукушкин А В УФН 163 (2) 81 (1993)
3. Шевченко В В Журнал Радиозлектроники (7) (2013)4. Кукушкин А В, Рухадзе А А, Рухадзе К 3 УФН 182 (11) 1205 (2012)
5. Мандельштам Л И Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике (М.: Наука, 1972), с.433, 421.